Este tipo de preguntas,

Encuentre todas las funciones que cumplen,

$$\int_0^x f(t) dt = f(x) + \int_0^1 f(x) dx$$

Solución:

$$F(x) - F(0) = \int_0^x f(t) dt = f(x) + \int_0^1 f(x) dx = f(x) + F(1) - F(0)$$

$$F(x) - F(0) = f(x) + F(1) - F(0)$$

$$F(x) = f(x) + F(1)$$

$$F(x) - F(1) = f(x)$$

$$\int_1^x f(t) dt = f(x)$$

Entonces con la nueva integral tenemos una pregunta idéntica pero más simple.

$$\int_1^x f(t) dt = f(x)$$

$$F(x) - F(1) = f(x)$$

Como habíamos dicho anteriormente, luego derivando la ecuación.

$$F'(x) - \underbrace{F'(1)}_0 = f'(x)$$

$$F'(x) = f'(x)$$

Por teorema fundamental, $F'(x) = f(x)$

Esto implica, $F'(x) = f(x) = f'(x)$

Es decir,

$$f(x) = f'(x)$$

$$1 = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Integrando,

$$\int 1 dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$x + c = \ln[f(x)]$$

Aplicando exponencial,

$$e^{x+c} = f(x)$$

$$f(x) = e^c e^x$$

$$f(x) = ke^x$$

Una vez que tengo la solución tentativa debo contrastarla con la integral inicial, pues he perdido información producto de derivación que hice al principio.

$$\int_0^x f(t) dt = f(x) + \int_0^1 f(x) dx$$

$$\int_0^x ke^t dt = ke^x + \int_0^1 ke^x dx$$

$$[ke^t]_0^x = ke^x + [ke^t]_0^1$$

$$k[e^x - e^0] = ke^x + k[e^1 - e^0]$$

$$k(e^x - e^0 - e^x - e^1 + e^0) = 0$$

$$k(-e^1) = 0$$

$$ke = 0$$

$$\Rightarrow k = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$