Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Septiembre, 2007.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija un problema entre los siguientes.

1. El estroncio -90 es un isótopo radiactivo peligroso. Debido a su semejanza con el calcio, es facilmente absorvido por los huesos del cuerpo humano. La vida media del estroncio-90 es de 28 años. Si los huesos absorven cierta cantidad, debido a la exposición a una explosión nuclear, ¿qué porcentaje permanecerá en ellos después de 50 años? [1]

   Solución y Puntaje:

   La función que describe la cantidad de materia en función del tiempo es
   $$f(t) = K\exp(-kt), \qquad (1 \text{ punto})$$
   medidos en alguna unidad de masa y t en años, K es la masa inicial.
   $$\begin{aligned} \frac{K}{2} = f(28) &= K\exp(-28k) \qquad (1 \text{ punto}) \\ \frac{1}{2} &= \exp(-28k) \\ -ln(2) &= -28k \\ k &= \frac{ln(2)}{28}. \qquad (1,5 \text{ puntos}) \end{aligned}$$
   Luego
   $$f(50) = K\exp\left(\left(\frac{-ln(2)}{28}\right)50\right). \qquad (1 \text{ punto})$$
   Luego el porcentaje de Estroncio-90 que queda después de 50 años es:

[1] La cantidad de masa de un elemento radiactivo decrece exponencial. La vida media de un elemento químico es el tiempo que se necesita para que se haya desintegrado la mitad de la cantidad inicial.

$$100\exp\left(\left(\frac{-ln(2)}{28}\right)50\right)\ \% \approx 29\,\% \quad \square$$

$(1,5$ puntos$)$

2. Calcule el volumen del sólido que resulta al girar la curva $y = x^2$, en torno al eje Y entre $x = 0$ y $x = 1$.

   Solución y Puntaje:

   El volumen del sólido que resulta al girar la curva $y = x^2$, en torno al eje Y entre $x = 0$ y $x = 1$. Es el mismo que el volumen que resulta al girar en torno al eje X la curva $y = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

   $$\boxed{\text{2 puntos}}$$

   Lo cual es:

   $$\pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx =$$

   $$\boxed{\text{2 puntos}}$$

   $$\pi \int_0^1 x dx = \frac{\pi}{2}$$

   $$\boxed{\text{2 puntos}}$$

3. Encuentra una función f, diferenciable en $[2, \infty)$, tal que $f(2) = 0$ y

   $$f'(x) = \frac{4}{x^2 + 2x - 3} \quad \forall x \in [2, \infty)$$

   Solución y Puntaje: Buscamos una primitiva f de $\frac{4}{x^2+2x-3}$ tal que $f(2) = 0$

   $$\boxed{\text{1 punto}}$$

   Utilizando fracciones parciales se tiene:

   $$\int \frac{4}{x^2 + 2x - 3} dx = \int \frac{4}{(x-1)(x+3)} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+3} =$$

   $$\boxed{\text{3 puntos}}$$

$$= \log(x-1) - \log(x+3) + C$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Luego si $f(x) = \log(x-1) - \log(x+3) + C$ y $f(2) = 0$ se tiene que

$$0 = f(2) = C - \log(5)$$

Luego $C = \log(5)$
Por lo tanto

$$f(x) = \log(x-1) - \log(x+3) + \log(5)$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$