Nombre:

Elija un problema entre los siguientes.

1. Encuentra una función f, diferenciable en $[2, \infty)$, tal que $f(2) = 0$ y

$$f'(x) = \frac{4}{x^2 + 2x - 3} \quad \forall x \in [2, \infty)$$

Solución: Buscamos una primitiva f de $\frac{4}{x^2+2x-3}$ en el intervalo $[2, \infty)$ tal que $f(2) = 0$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Utilizando fracciones parciales se tiene:

$$\int \frac{4}{x^2 + 2x - 3} dx = \int \frac{4}{(x-1)(x+3)} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+3} =$$

$$\boxed{\text{3 puntos}}$$

$$= \log(x-1) - \log(x+3) + C$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Luego si $f(x) = \log(x-1) - \log(x+3) + C$ y $f(2) = 0$ se tiene que

$$0 = f(2) = C - \log(5)$$

Luego $C = \log(5)$

Por lo tanto

$$f(x) = \log(x-1) - \log(x+3) + \log(5)$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

2. Calcula la integral

$$\int \frac{x^2+1}{2x^2+3x+1}dx$$

Solución: Primero que nada notar que $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x^2+3x+1}$ no es continua en $\mathbb{R}$, (de hecho no es función en $\mathbb{R}$) entonces las funciones primitivas dependen del dominio de f. Los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, -1/2)$ y $(-1/2, \infty)$ son tales que la función es continua en ellos.

$\boxed{\text{1 punto}}$

Caso 1: Encontremos la primitiva de $f : \left(\frac{-1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x^2+3x+1}$

$$\int \frac{x^2+1}{2x^2+3x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x^2+3x+1+1-3x}{2x^2+3x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{1-3x}{2x^2+3x+1}dx \tag{1}$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Utilizando fracciones parciales para $\dfrac{1-3x}{2x^2+3x+1}$ se obtiene:

$$\frac{1-3x}{2x^2+3x+1} = \frac{-4}{x+1} + \frac{5}{2x+1}$$

Reemplazando en (3) se obtiene:

$$\int \frac{x^2+1}{2x^2+3x+1}dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left[-4\int \frac{1}{x+1}dx + 5\int \frac{1}{2x+1}dx\right]$$

$$= \frac{x}{2} - 2\log(x+1) + \frac{5}{4}\log(2x+1) + C$$

$$\int \frac{x^2+1}{2x^2+3x+1}dx = \frac{x}{2} + \log\left(\frac{(2x+1)^{5/4}}{(x+1)^2}\right) + C$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Observación 0.1 *Notar que si $2x+1$ fuese negativo, entonces $(2x+1)^{5/4}$ no tendría sentido. Y si $x+1$ fuese negativo o cero, entonces $\log(x+1)$ no tendría sentido.*

<u>Caso 2:</u> Encontremos la primitiva de $f:\left(-1,\frac{-1}{2}\right)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x^2+3x+1}$

$$\int \frac{x^2+1}{2x^2+3x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x^2+3x+1+1-3x}{2x^2+3x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{1-3x}{2x^2+3x+1}dx \tag{2}$$

Utilizando fracciones parciales para $\dfrac{1-3x}{2x^2+3x+1}$ se obtiene:

$$\frac{1-3x}{2x^2+3x+1}=\frac{-4}{x+1}+\frac{5}{2x+1}$$

Reemplazando en (3) se obtiene:

$$\int \frac{x^2+1}{2x^2+3x+1}dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\left[-4\int\frac{1}{x+1}dx+5\int\frac{1}{2x+1}dx\right]$$

$$=\frac{x}{2}-2\log(x+1)+\frac{5}{4}\log(-(2x+1))+C$$

$$\int \frac{x^2+1}{2x^2+3x+1}dx=\frac{x}{2}+\log\left(\frac{(-2x-1)^{5/4}}{(x+1)^2}\right)+C$$

Observación 0.2 *Notar que si $g(x)=\dfrac{5}{4}\log(-2x-1)$ con $x\in(-1,\frac{-1}{2})$, entonces*

$$g'(x)=\frac{5}{4}\frac{-2}{-2x-1}=\frac{5}{2}\frac{1}{2x+1}$$

<u>Caso 3:</u> Encontremos la primitiva de $f:(-\infty,-1)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x^2+3x+1}$

$$\int \frac{x^2+1}{2x^2+3x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x^2+3x+1+1-3x}{2x^2+3x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{1-3x}{2x^2+3x+1}dx \tag{3}$$

Utilizando fracciones parciales para $\dfrac{1-3x}{2x^2+3x+1}$ se obtiene:

$$\frac{1-3x}{2x^2+3x+1} = \frac{-4}{x+1} + \frac{5}{2x+1}$$

Reemplazando en (3) se obtiene:

$$\int \frac{x^2+1}{2x^2+3x+1}dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left[-4\int \frac{1}{x+1}dx + 5\int \frac{1}{2x+1}dx\right]$$

$$= \frac{x}{2} - 2\log(-x-1) + \frac{5}{4}\log(-(2x+1)) + C$$

$$\int \frac{x^2+1}{2x^2+3x+1}dx = \frac{x}{2} + \log\left(\frac{(-2x-1)^{5/4}}{(x+1)^2}\right) + C$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$