Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Septiembre, 2008.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija un problema entre los siguientes.

1. Encuentre todas las funciones f continuas en todo $\mathbb{R}$ tales que

$$\int_0^x f(t)dt = f(x) + \int_0^1 f(x)dx \tag{1}$$

<u>Solución:</u> Notar primero que la función $G(x) = \int_0^x f(t)dt$ es diferenciable y $G'(x) = f(x)$, y $a = \int_0^1 f(t)dt$ es constante para cada f. Por lo tanto:

$$f(x) = G(x) - a$$

es diferenciable.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Derivando a ambos lados se tiene:

$$f'(x) = f(x)$$

por lo tanto existe una constante K tal que

$$f(x) = Ke^x \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{3 puntos.}}$

Reemplazando en (1) se tiene:

$$\int_0^x Ke^t dt = Ke^x + K(e-1)$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Evaluando en $x = 0$ se obtiene:

$$0 = Ke \Leftrightarrow K = 0$$

Por lo tanto f es la función nula.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

2. ¿Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\log(x) = x$?

<u>Solución:</u> Primero que nada notar que la ecuación no tiene sentido en $(-\infty, 0]$ pues log no está definido en ese dominio.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Si tal x existe, entonces no está en $(0, 1)$ pues en ese intervalo log es negativa y la identidad es no negativa. Entonces si tal x existe, éste está en $[1, \infty)$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Consideremos la función $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - \log(x)$. Notar que $f(1) = 1$ y que

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \geq 0$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Por lo tanto f es creciente, de donde se tiene que si $x \geq 1$, entonces

$$f(x) \geq f(1) = 1$$

$$x - \log(x) \geq 1$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por lo tanto $x - \log(x) \neq 0,\ \forall x \geq 1$, es decir $x \neq \log(x),\ \forall x \geq 1$.

Entonces no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = \log(x)$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$