Pauta Control 4 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Martes 31 de Agosto, 2010

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija solo un problema.

1. Calcule

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{n^2}\sqrt{2\left(\frac{2k}{n}\right)^2+1}$$

Solución:

Notar que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{n^2}\sqrt{2\left(\frac{2k}{n}\right)^2+1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}\left(\sqrt{2\left(\frac{2k}{n}\right)^2+1}\right)\frac{2}{n}$$

Consideremos la función $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x\sqrt{2x^2+1}$ y $P_n=\{x_k:0\le k\le n\}$, donde $x_k=\frac{2k}{n}$ partición del intervalo $[0,2]$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}\left(\sqrt{2\left(\frac{2k}{n}\right)^2+1}\right)\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)(x_k-x_{k-1})$$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{n^2}\sqrt{2\left(\frac{2k}{n}\right)^2+1}=\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}dx$$

Sea $u=2x^2+1$ entonces $du=4xdx$ entonces

$$\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}dx=\frac{1}{4}\int_1^9\sqrt{u}du=\frac{1}{4}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}|_1^9=\frac{1}{6}(9^{\frac{3}{2}}-1)=\frac{13}{3}$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{n^2}\sqrt{2\left(\frac{2k}{n}\right)^2+1}=\frac{13}{3}$$

2. Determine
$$\int x^2 sen(x)dx$$

Solución:

Sea $u = x^2$ y $dv = sen(x)dx$ entonces $du = 2xdx$ y $v = -cos(x)$. Usando integración por partes, se tiene que

$$\int x^2 sen(x)dx = x^2(-cos(x)) - \int (-cos(x)2xdx = -x^2 cos(x) + 2 \int xcos(x)dx$$

Para determinar $\int xcos(x)dx$, usamos nuevamente integración por partes. Sea $u = x$ y $dv = cos(x)dx$ entonces $du = dx$ y $v = sen(x)$. Luego

$$\int xcos(x) = xsen(x) - \int sen(x)dx = xsen(x) + cos(x) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. Por tanto

$$\int x^2 sen(x)dx = -x^2 cos(x) + 2(xsen(x) + cos(x) + c) = -x^2 cos(x) 2xsen(x) + 2cos(x) + k$$

con $k \in \mathbb{R}$.