Pauta Control 3 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Martes 24 de Agosto, 2010

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija solo un problema.

1. Si $F(x) = \int_{-2x}^{x^3} \frac{1}{1+t^4} dt$, encuentre $F'(x)$.

   Solución:

   Notar que

   $$F(x) = \int_{-2x}^{x^3} \frac{1}{1+t^4} dt = \int_{-2x}^{a} \frac{1}{1+t^4} dt + \int_{a}^{x^3} \frac{1}{1+t^4} dt = -\int_{a}^{-2x} \frac{1}{1+t^4} dt + \int_{a}^{x^3} \frac{1}{1+t^4} dt$$

   Entonces

   $$F'(x) = \left(-\int_{a}^{-2x} \frac{1}{1+t^4} dt\right)' + \left(\int_{a}^{x^3} \frac{1}{1+t^4} dt\right)'$$

   Sea $G(x) = \int_a^x \frac{1}{1+t^4} dt$, $f(x) = -2x$ y $g(x) = x^3$ entonces

   $$\int_{a}^{-2x} \frac{1}{1+t^4} dt = (G \circ f)(x)$$

   y

   $$\int_{a}^{x^3} \frac{1}{1+t^4} dt = (G \circ g)(x)$$

   Por teorema fundamental del calculo se tiene que $G'(x) = \frac{1}{1+x^4}$.
   Por tanto

   $$\begin{aligned} F'(x) &= \left(-\int_{a}^{-2x} \frac{1}{1+t^4} dt\right)' + \left(\int_{a}^{x^3} \frac{1}{1+t^4} dt\right)' \\ &= (-(G \circ f)(x))' + ((G \circ g)(x))' \\ &= -G'(f(x))f'(x) + G'(g(x))g'(x) \\ &= -\frac{1}{1+(-2x)^4} - 2 + \frac{1}{1+(x^3)^4} 3x^2 \\ &= \frac{2}{1+16x^4} + \frac{3x^2}{1+x^{12}} \end{aligned}$$

2. Calcule el área de la región comprendida entre las curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x - 1$.

   Solución:

   Sea A el área de la región comprendida entre las curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x - 1$, entonces se tiene que

   $$A = \int_0^1 [(x-1) - (x^2 - 1)]dx = \int_0^1 (x - x^2)dx$$

   Por teorema fundamental del calculo se tiene que

   $$\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}|_0^1 = \frac{1}{2}$$

   e

   $$\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{1}{3}$$

   Entonces

   $$A = \int_0^1 (x - x^2)dx = \int_0^1 xdx - \int_0^1 x^2dx = \frac{x^2}{2}|_0^1 - \frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$