Pauta Control 2 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Martes 17 de Agosto, 2010

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija solo un problema.

1. Para $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + x$, calcule
$$\lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$$
donde P_n es la partición que divide a $[0,1]$ en n subintervalos de igual longitud.

Solución:

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$
$$P_n = \left\{ x_k = \frac{k}{n} : k = 0, 1, \dots, n \right\}$$
y
$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$
donde $M_k = sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ y $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$.
Si $f(x) = x^2 + x$ entonces $f'(x) = 2x + 1 > 0$ para todo $x \in [0,1]$. Por tanto f es creciente en $[0,1]$.
Luego $M_k = f(x_k) = x_k^2 + x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{k}{n}$, para cada $k = 1, \dots, n$.
Asi
$$\begin{aligned}
S(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= \frac{5}{6} + \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^2}
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{6} + \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^2} = \frac{5}{6}$$

2. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada tal que para cualquier partición P se tiene que $S(f,P) = s(f,P)$ ¿Es f una función constante?.

Solución:

Recordar que si $P = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ es una partición cualquiera de $[a,b]$ entonces

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

y

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

donde

$$m_k = inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

y

$$M_k = sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Notemos que

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

donde $M_k - m_k \geq 0$ para todo $k = 1, \ldots, n$, puesto que $M_k \geq m_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$ y $x_k - x_{k-1} > 0$, puesto que $x_k - x_{k-1}$ es el largo del k-ésimo intervalo de la Partición P. Entonces $S(f,P) - s(f,P) \geq 0$.
Como $S(f,P) = s(f,P)$ para cualquier partición P entonces

$$S(f,P) - s(f,P) = 0$$

para cualquier particiíon P. Esto implica que

$$(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = 0$$

para todo $k = 1, \ldots, n$.
Entonces $M_k - m_k = 0$ para todo $k = 1, \ldots, n$, es decir $M_k = m_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$ y para cualquier partición P. Por tanto f es constante en $[a,b]$.