Guía II

Ejercicios Resueltos Integrales y Teo. Fundamental del Cálculo

1. Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables, ¿ Es cierto que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)?$$

<u>Solución</u>:

La base de la integral es una sumatoria, a partir de esto deberiamos preguntarnos si las sumatorias cumplen con esta propiedad. La respuesta es "No", lo que bastante simple de intuir, pues ya tenemos bastante practica con ellas.

Demonos un contraejemplo,

$$f(x) = 1$$

$$g(x) = 1$$

$$\int_a^b 1 \cdot 1dx = \left(\int_a^b 1dx\right)\left(\int_a^b 1dx\right)$$

$$[x]_a^b = [x]_a^b[x]_a^b$$

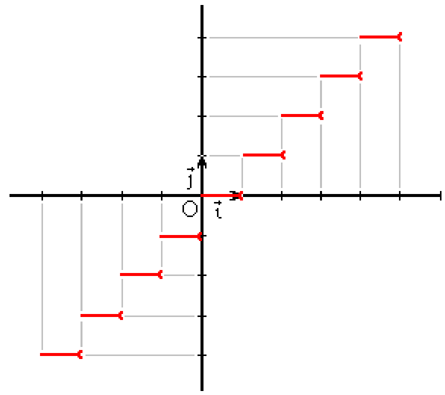
$$b - a = (b - a)(b - a)$$

Es decir, solo se cumple la propiedad si b=a, lo que no tiene sentido, pues seria cero igual a cero.

2. Considera $n \in \mathbb{N}$ y define $I_n = \int_0^n [x]dx$. Encuentra el valor de I_n en términos de n.

<u>Solución</u>:

La función parte entera es de la forma,



La forma más facil de calcular el area bajo la curva, es diviendo la integral en todo los numeros naturales.

Todos conocemos la propiedad,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

A partir de esta propiedad, redefinimos la integral anterior.

$$I_n = \int_0^n [x]dx$$

$$I_n = \int_0^1 [x]dx + \int_1^2 [x]dx + \int_2^3 [x]dx + \cdots + \int_{n-1}^n [x]dx$$

Mirando la grafica es facil ver que,

$$I_n = \overbrace{\int_0^1 [x]dx}^{=0} + \overbrace{\int_1^2 [x]dx}^{=1} + \overbrace{\int_2^3 [x]dx}^{=2} + \cdots + \overbrace{\int_{n-1}^1 [x]dx}^{=n-1}$$

$$I_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1$$

$$I_n = \sum_{i=1}^{n-1} i$$

$$I_n = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$$

$$I_n = \frac{(n-1)n}{2}$$

3. Para cada $x \in \mathbb{R}$ define $I(x) = \int_0^x [t]dt$. Grafica I.

<u>Solución</u>:

Este problema es prácticamente el mismo que el anterior, solo que en este caso llega hasta un *x* perteneciente a los reales, en contraposición a *n* perteneciente a los naturales.

Solucionaremos este problema con la siguiente relación.

$$I(x) = \int_0^x [t]dt$$

$$I(x) = \int_0^{[x]} [t]dt + \int_{[x]}^x [t]dt$$

La primera integral es analoga a la pregunta anterior, solo que en este caso aparece *[x]* en vez de *n*.

$$\int_0^{[x]} [t]dt = I_{[x]}$$

$$\int_0^{[x]} [t]dt = \frac{([x]-1)[x]}{2}$$

Entonces,

$$I(x) = \frac{([x]-1)[x]}{2} + \int_{[x]}^x [t]dt$$

Ahora, cual es la imagen de la función parte entera en ([x] ,x), es claramente [x].

$$I(x) = \frac{([x]-1)[x]}{2} + \int_{[x]}^x [x]dt$$

Parte entera sale de la integral, pues no depende de *t*.

$$I(x) = \frac{([x]-1)[x]}{2} + [x]\int_{[x]}^x dt$$

$$I(x) = \frac{([x]-1)[x]}{2} + [x] \cdot t_{[x]}^{x}$$

$$I(x) = \frac{([x]-1)[x]}{2} + [x] \cdot (x - [x])$$

Para graficar,

Si $0 \leq x < 1$, entonces

$$F(x) = \int_0^x [u]du = \int_0^x 0du = 0$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Si $1 \leq x < 2$, entonces

$$F(x) = \int_0^x [u]du = \int_0^1 0du + \int_1^x 1du = 0 + x - 1 = x - 1$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

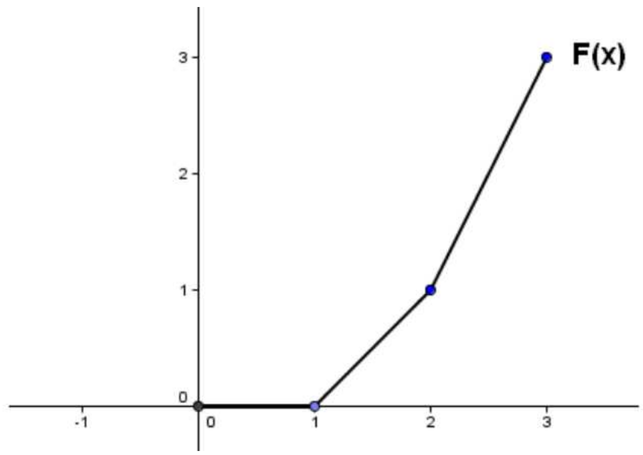
Si $2 \leq x < 3$, entonces

$$F(x) = \int_0^x [u]du = \int_0^1 0du + \int_1^2 1du + \int_2^x 2du = 0+1+2(x-2) = 2x-3$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Entonces

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2x-3 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



4. Si f es par y $\int_0^a f(t)dt = A$. Calcula $\int_{-a}^a f(t)dt$, en términos de A.

Solución: Por propiedad enunciada en el ejercicio 2,

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$$

Por enunciado,

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + A$$

Por propiedad de integral,

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{-a} f(t)dt + A$$

Ahora, realizando un cambio de variable.

$$t = -x \Rightarrow dt = -dx$$

$$si\ t = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$si\ t = -a \Rightarrow -a = -x\ \Rightarrow\ x = a$$

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(-x)(-dx) + A$$

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx + A$$

Pero, como f(x) es par implica que $f(-x) = f(x)$

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx + A$$

Por enunciado,

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = A + A$$

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2A$$

5. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y P una partición de $[a,b]$. ¿Qué relación hay entre $\int_a^b f(t)dt$ y $S(f,P)$?

Solución:

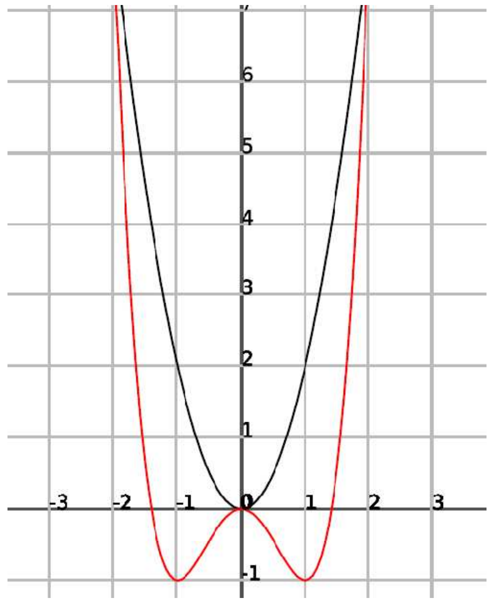
La relación es la siguiente,

$$\int_{a}^{b} f(t)dt \leq S(f,P)$$

6. Dibujar la región limitada por los gráficos de las funciones $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$ y calcular su área.

Solución:

Primero hay que encontrar las intercepaciones de las dos curvas. Esto se puede encontrar al igualar las ecuaciones anteriores.



$$y_1 = 2x^2$$

$$y_2 = x^4 - 2x^2$$

Al igualar y_1 y y_2

$$y_1 = y_2$$

$$2x^2 = x^4 - 2x^2$$

$$0 = x^4 - 4x^2$$

$$0 = x^2(x^2 - 4)$$

$$0 = x^2(x-2)(x+2)$$

Es decir, las curvas se interceptan en 0, -2 y en 2.

Debemos integrar,

$$\int_{-2}^{2} |y_1 - y_2| dx$$

Como $y_1 \geq y_2 \ \forall \ x \ \in [-2,2]$ (Ver grafica), podemos eliminar el valor absoluto.

$$\int_{-2}^{2} 2x^2 - (x^4 - 2x^2)dx = \int_{-2}^{2} (4x^2 - x^4)dx$$

$$\int_{-2}^{2} 2x^2 - (x^4 - 2x^2)dx = 4\int_{-2}^{2} x^2 dx - \int_{-2}^{2} x^4 dx$$

$$\int_{-2}^{2} 2x^2 - (x^4 - 2x^2)dx = 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} - \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2}$$

$$\int_{-2}^{2} 2x^2 - (x^4 - 2x^2)dx = 4\left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right) - \left(\frac{2^5}{5} - \frac{(-2)^5}{5}\right)$$

$$\int_{-2}^{2} 2x^2 - (x^4 - 2x^2)dx = 4\left(\frac{16}{3}\right) - \left(\frac{64}{5}\right)$$

7. Encuentra una función tal que su derivada sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(2x)$. (Ayuda: La respuesta no es la función real definida para cada x por $G(x) = \sin(2x)$)

Solución:

Que tal $F(x) = \frac{sen(2x)}{2} \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \cos(2x)$

Cuando se busca una función tal que derivada sea f(t), se esta buscando la integral de f(t), pues la integral es la inversa de la derivada.

$$\int \cos(2x)dx$$

Ahora, realizando un cambio de variable.

$$2x = t \Rightarrow 2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

Luego,

$$\int \cos(2x)dx = \int \cos(t)\frac{dt}{2}$$

$$\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\int \cos(t)dt$$

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{sen(t)} + \mathrm{c}$$

¿Pero que es t?, t=2x

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + c$$

8. Considera $n \in \mathbb{Z}$, ¿Cuál es el valor de la integral $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|dx$?

Solución:

$$|\operatorname{sen}(x)| = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si } x \in [2k\pi, 2k\pi + 1] \\ -\operatorname{sen}(x) & \text{si } x \in [2k\pi + 1, 2k\pi + 2] \end{cases} \text{ con } k \in Z$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\operatorname{sen}(x)|\,dx = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\operatorname{sen}(x)|\,dx = [-\cos(x)]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\operatorname{sen}(x)|\,dx = -\cos\big((2k+1)\pi\big) + \cos(2k\pi)$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\operatorname{sen}(x)|\,dx = --1 + 1$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\operatorname{sen}(x)|\,dx = 2$$

9. El teorema fundamental del calculo dice que cualquier función continua tiene una función primitiva. Encuentre la primitiva F de $f(x) = |x|$, tal que $F(0) = 0$.

Solución:

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, tenemos $F'(x) = f(x) = |x|$

$$F'(x) = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si x} < 0 \end{cases}$$

Para $x > 0$,

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

Para x = 0,

$$F(0) = 0$$

Y para x < 0,

$$F(x) = -\frac{x^2}{2}$$

Desde aquí concluimos que,

$$F(x) = \frac{x|x|}{2}$$

10. Sabemos que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una función diferenciable en (a, b). ¿Qué puede Ud. decir de $G(x) = \int_x^b f(t)dt$?

Solución 1:

G(x) se puede escribir de la siguiente forma,

$$\mathrm{G(x) = F(b) - F(x)}$$

Luego, como F(x) es diferenciable G(x) es diferenciable.

Solución 2:

Aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo $\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x) = F'(x)$,

tenemos

$$G(x) = -\int_b^x f(t)dt$$

$$\frac{dG(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[-\int_b^x f(t)dt\right] = -\frac{d}{dx}\left[\int_b^x f(t)dt\right] = -f(x) = -F'(x)$$

$$\frac{dG(x)}{dx} = -F'(x)$$

Luego, como F(x) es diferenciable G(x) también lo es, pues su diferencial proporcional.

11. Sea $F(x) = \int_0^{x^2} \cos(t)dt$.¿Qué podría Ud. decir de $F'(x)$? (Ayuda: F es la composición de dos funciones, las cuales son fáciles de derivar.)

<u>Solución</u>:

Definamos las diguientes funciones,

$$G(x) = \int_o^x \cos(t)\, dt \quad \underset{Por\ T.F.C.}{\Longrightarrow} \quad G'(x) = \cos(x)$$

$$h(x) = x^2 \;\Rightarrow\; h'(x) = 2x$$

Es claro que,

$$G(h(x)) = \int_o^{h(x)} \cos(t)\, dt$$

$$G(h(x)) = \int_o^{x^2} \cos(t)\, dt$$

$$G(h(x)) = F(x)$$

Luego, derivando la ecuación anterior.

$$G'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) = F'(x)$$

Finalmente,

$$\cos(x^2) \cdot 2x = F'(x)$$

12. *[No es fácil]* Sea f continua y no negativa en $[a,b]$ tal que existe $\xi \in [a,b]$ con $f(\xi) > 0$, entonces pruebe que $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Solución:

Por enunciado,

$$\exists\ \varepsilon\ \in\ [a,b]\ tal\ que\ \ f(\varepsilon) > 0$$

Por teorema fundamental del calculo, sabemos,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \xrightarrow[Por\ T.F.C.]{} \quad F'(x) = f(x) \ \Rightarrow \quad F'(\varepsilon) = f(\varepsilon)$$

Volviendo,

$$\exists\ \varepsilon\ \in\ [a,b]\ tal\ que\ \ f(\varepsilon) > 0$$

$$\exists\ \varepsilon\ \in\ [a,b]\ tal\ que\ \ F'(\varepsilon) > 0$$

Por Teorema del Valor medio, sabemos,

$$\exists\ \varepsilon\ \in\ [a,b]\ tal\ que\ \ F'(\varepsilon) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

Entonces,

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} > 0$$

$$F(b) - F(a) > 0$$

$$\int_a^b f(t)dt + \int_a^a f(t)dt > 0$$

$$\int_a^b f(t)dt > 0$$

13. Pruebe que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n+1}(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n(x)dx.$$

Solución:

Primero,

$$0 \leq sen(x) \leq 1 \quad \forall \; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad (1)$$

Luego,

$$0 \leq sen(x) \quad \forall \; x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Implica,

$$0 \leq sen^n(x) \quad \forall \; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad (2)$$

Multiplicando la ecuación (2) por la ecuación (1),

$$0 \leq sen^{n+1}(x) \leq sen^n(x) \quad \forall \; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Integrando (se conserva la desigualdad, cuando los elementos integrados son mayores que cero),

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n+1}(x)dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n(x)dx$$

14. Hallar f diferenciable en $\mathbb{R}$ y un número real a tal que $\int_a^x f(t)dt = cos(x) - \frac{1}{2}$.

Solución:

Por Teo. Fundamental del Cálculo,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)$$

Con

$$F'(x) = f(x)$$

Entonces,

$$F(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}$$

Derivemos para encontrar f(x),

$$F'(x) = f(x) = -\mathrm{sen(x)}$$

Volviendo a la integral original,

$$\int_a^x -sen(t)dt = [\cos{(t)}]_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}$$

$$\int_a^x -sen(t)dt = \cos(\mathrm{x}) - \cos{(\mathrm{a})}$$

$$\cos(x) - \cos(\mathrm{a}) = \cos(\mathrm{x}) - \frac{1}{2}$$

$$\cos(a) = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{a} = \frac{\pi}{3}$$

Pero también,

$$\mathrm{a} = \frac{\pi}{3} + 2\pi\mathrm{k} \quad \text{con } \mathrm{k} \in \mathrm{Z} \qquad\qquad \mathrm{a} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathrm{k} \quad \text{con } \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$$

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de periodo T. Pruebe que $F(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt$ es una función constante.

<u>Solución</u>:

Dada esta integral,

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = F(x)$$

Realizaremos el siguiente cambio de variable,

$$t = u + x \Rightarrow dt = du$$

$$si\ t = x \Rightarrow \quad x = u + x \quad \Rightarrow \quad u = 0$$

$$si\ t = x + T \ \Rightarrow x + T = u + x \ \Rightarrow \ u = T$$

$$\int_{x}^{x+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(u+x)du = F(0)$$

Toda integral con límites finitos es constante

Como F(0) es constante.

16. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada tal que para cualquier partición P se tiene que $S(f,P) = s(f,P)$. ¿ Es f una función constante?

Solución 1:

Como se cumple para cualquier partición, entonces consideremos lo siguiente,

$$P = \{x_0 = a, x_1 = b\}$$

Luego,

$$S(f,P) = (b-a) \cdot M(f) = (b-a) \cdot m(f) = s(f,P)$$

$$M(f) = m(f)$$

$$\sup \ \{f(x) \ \ / \, x \in [a,b]\} = \inf \ \{f(x) \ \ / \, x \in [a,b]\}$$

La única forma que se cumpla la igualdad anterior,

$$f(x) = c \ \ \forall \ \ x \in [a,b] \ \ con \ \ c = cte$$

Solución 2:

Recordar que si $P = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ es una partición cualquiera de $[a, b]$ entonces

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

y

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

donde

$$m_k = inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

y

$$M_k = sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Notemos que

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{k-1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

donde $M_k - m_k \geq 0$ para todo $k = 1, \ldots, n$, puesto que $M_k \geq m_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$ y $x_k - x_{k-1} > 0$, puesto que $x_k - x_{k-1}$ es el largo del k-ésimo intervalo de la Partición P. Entonces $S(f, P) - s(f, P) \geq 0$.
Como $S(f, P) = s(f, P)$ para cualquier partición P entonces

$$S(f, P) - s(f, P) = 0$$

para cualquier particiíon P. Esto implica que

$$(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) - 0$$

para todo $k = 1, \ldots, n$.
Entonces $M_k - m_k = 0$ para todo $k = 1, \ldots, n$, es decir $M_k = m_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$ y para cualquier partición P. Por tanto f es constante en $[a, b]$.

17. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$. Demuestre que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Solución:

Considerando,

$$P = \{x_0 = a, \ldots, x_n = b\}$$

Entonces,

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \geq 0 \ \forall \ \ i \in N$$

Además, como las imágenes son positivas.

$$m^i(f) \geq 0 \ \forall \ \ i \in N$$

Luego, la multiplicación también es positiva

$$\Delta x_i \cdot m^i(f) \geq 0 \ \forall \ \ i \in N$$

La sumatoria también,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \cdot m^i(f) \geq 0 \ \forall \ \ i \in N$$

Sacando el limite,

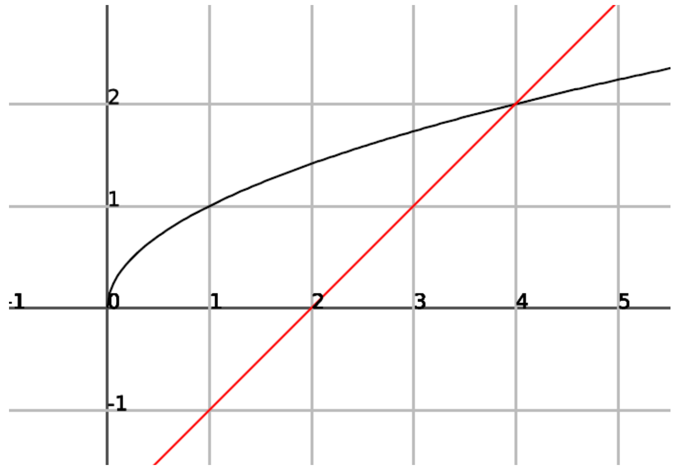
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \cdot m^i(f) \geq 0 \ \forall \ \ i \in N$$

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0$$

18. Encuentre el área acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ y el eje X.

Solución:

Primero hay que encontrar las intercepciones de las dos curvas. Esto se puede encontrar al igualar las ecuaciones anteriores.



$$y_1 = \sqrt{x}$$

$$y_2 = x - 2$$

Al igualar y_1 y y_2

$$y_1 = y_2$$

$$\sqrt{x} = x - 2$$

$$x^2 - 4x + 4 = x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$0 = (x - 4)(x - 1)$$

Es decir, las curvas se interceptan en 1 y en 4.

Debemos integrar,

$$\int_0^4 y_1 dx - \int_2^4 y_2 dx$$

$$\int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_2^4 (x - 2) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 - \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^4$$

$$\int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_2^4 (x - 2) dx = \frac{4^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 0 - \left(\frac{4^2}{2} - 8 - \frac{2^2}{2} + 4\right)$$

$$\int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_2^4 (x - 2) dx = \frac{16}{3} - 2$$

19. Muestre que $\int_1^4 \frac{1}{t}dt > 1$.

<u>Solución</u>:

$$\sqrt{x} > \frac{x}{2} \qquad \forall \ x \in [1,4]$$

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \forall \ x \in [1,4]$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx > \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx > \left[\frac{\sqrt{x}}{2\frac{1}{2}}\right]_1^4$$

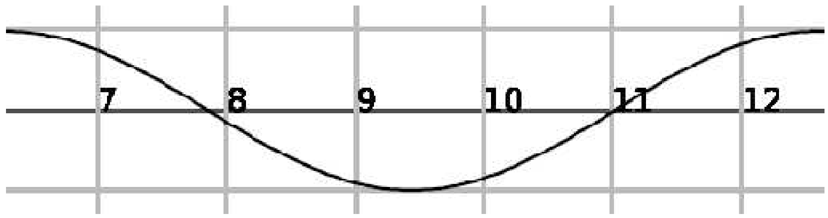
$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx > \sqrt{4} - \sqrt{1}$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx > 1$$

20. Sin hacer cálculos explique por que $\int_{2\pi}^{4\pi} cos(x)dx = 0$

Solución:

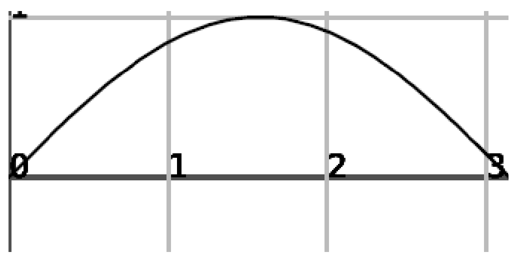
Al ver la grafica es claro que es cero.



21. Sin hacer cálculos explique por que $2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sen(x)dx = \int_{0}^{\pi} sen(x)dx$

Solución:

Al ver la grafica, es clara la igualdad.



22. Se estima que dentro de x meses la población de cierto pueblo cambiará a una razón de $2 + 6\sqrt{x}$ personas por mes. Si la población actual es de 5000 personas. ¿Cuál será la población dentro de 9 meses?

Solución:

Para hacer este ejercicio tienen que conocer la función logaritmo natural, todavía no lo pueden hacer.

23. Sea $F(x) = \int_0^{x^2} sen(t)dt$.¿Qué podría Ud. decir de $F'(x)$? (Ayuda: F es la composición de dos funciones, las cuales son fáciles de derivar.)

Solución:

Definamos las siguientes funciones,

$$G(x) = \int_{o}^{x} \operatorname{sen}(t)\, dt \quad \xrightarrow[Por\ T.F.C.]{} \quad G'(x) = \operatorname{sen}\,(x)$$

$$h(x) = x^2 \;\Rightarrow\; h'(x) = 2x$$

Es claro que,

$$G(h(x)) = \int_{o}^{h(x)} \operatorname{sen}(t)\, dt$$

$$G(h(x)) = \int_{o}^{x^2} \operatorname{sen}(t)\, dt$$

$$G(h(x)) = F(x)$$

Luego, derivando la ecuación anterior.

$$G'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) = F'(x)$$

Finalmente,

$$\operatorname{sen}(x^2) \cdot 2x = F'(x)$$

24. ¿Por qué cree Ud. que al número $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ se le llama el promedio de f en $[a, b]$?

Solución:

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(t)dt = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i\, m_i(f)$$

Considerando,

$$P = \{x_0 = a, \dots, x_n = b\}$$

Entonces,

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \quad \forall \quad i \in N$$

Luego,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}\, m_i(f)$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\, m_i(f)$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1} m_i(f)}{n}$$

La suma de todas las imágenes, dividido por la cantidad de ellas, es el promedio.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1} m_i(f)}{n} = \overline{m(f)}$$

25. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva (es decir, $f(x) > 0, \forall x \in [a,b]$). Pruebe que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una función inyectiva.

26. ¿Cuál es el error en: " $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{x}/_{-1}^{1} = -2$"?

Solución:

La función $\frac{1}{x^2}$ no es acotada en [-1,1], por lo tanto no es integrable.

27. Dé un sentido físico a "$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$".

Solución:

Daremos dos sentidos físicos para la ecuación.

f(t) la velocidad o aceleración.

¿Tiene sentido físico f(t)la posición?, No, porque la integral de la posición no tiene sentido físico.

28. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua, biyectiva y creciente tal que $\int_0^1 f(x)dx = a$. Calcule $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$ en función de a. (Ayuda: Piense, por ejemplo, en $f(x) = x^2$ y en $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.)

29. Si f es continua en $[a,b]$ y si $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces pruebe que existe $\xi \in [a,b]$ tal que $f(\xi) = 0$.

Solución:

Sí,

$$\int_a^b f(t)dt = 0$$

$$\int_a^b f(t)dt + \int_a^a f(t)dt = 0$$

Por teorema fundamental del calculo,

$$F(b) - F(a) = 0$$

Dividiendo,

$$\frac{F(b) - F(a)}{b-a} = 0$$

Por Teorema del Valor medio, sabemos,

$$\exists\ \varepsilon\ \in\ [a,b]\ tal\ que\ \ F'(\varepsilon) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}$$

De lo anterior,

$$\exists\ \varepsilon\ \in\ [a,b]\ tal\ que\ \ F'(\varepsilon) = 0$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \underset{Por\ T.F.C.}{\Longrightarrow} \quad F'(x) = f(x) \ \Rightarrow \quad F'(\varepsilon) = f(\varepsilon) = 0$$

$$\exists\ \varepsilon\ \in\ [a,b]\ tal\ que\ \ f(\varepsilon) = 0$$

30. Calcule las siguientes integrales:

$a)\ \int_{-2}^{3} |t|dt$

$b)\ \int_{0}^{\pi} sen(t)dt$

$c)\ \int_{0}^{\pi} tsen(t)dt$

$d)\ \int_{0}^{\pi} cos(x)sen(x)dx$

$e)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sen^2(z)dz$

$f)\ \int_{1}^{4} u\sqrt{u}du$

$g)\ \int_{2}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$h)\ \int_{\pi}^{2\pi} ucos(u^2)du$

$i)\ \int_{0}^{1} x\sqrt{2-x}dx$

$j)\ \int_{0}^{\pi} t^2sen(t)dt$

Solución:

a)

$$\int_{-2}^{3} |t|dt = \int_{-2}^{0} -tdt + \int_{0}^{3} tdt$$

$$\int_{-2}^{3} |t|dt = \left[-\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{3}$$

$$\int_{-2}^{3} |t|dt = \frac{(-2)^2}{2} + \frac{3^2}{2}$$

$$\int_{-2}^{3} |t|dt = \frac{13}{2}$$

b)

$$\int_{0}^{\pi} sen(t)dt = [-\cos(t)]_{0}^{\pi}$$

$$\int_{0}^{\pi} sen(t)dt = -\cos(\pi) + \cos(0)$$

$$\int_{0}^{\pi} sen(t)dt = 2$$

c)

$$\int_0^{\pi} t \cdot sen(t)dt$$

Integración por partes,

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

$$g(t) = t \quad f'(t) = sen(t)$$

$$g'(t) = 1 \quad f(t) = -cos(t)$$

$$\int_0^{\pi} t \cdot sen(t)dt = [-tcos(t)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(t)\, dt$$

$$\int_0^{\pi} t \cdot sen(t)dt = [-tcos(t)]_0^{\pi} + [sen(t)]_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} t \cdot sen(t)dt = -\pi cos(\pi) + 0\cos(0) + sen(\pi) - \mathrm{sen}(0)$$

$$\int_0^{\pi} t \cdot sen(t)dt = \pi$$

d)

$$\int_0^{\pi} \cos(t) \cdot sen(t)dt = \int_0^{\pi} \frac{sen(2t)}{2} dt$$

$$\int_0^{\pi} \cos(t) \cdot sen(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} sen(2t)dt$$

$$2t = x \quad \Rightarrow \quad 2dt = dx$$

$$si\ t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$si\ t = \pi \quad \Rightarrow \quad x = 2\pi$$

$$\int_0^{\pi} \cos(t) \cdot sen(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} sen(x)\frac{dx}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \cos(t) \cdot sen(t)dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} sen(x)dx$$

$$\int_0^{\pi} \cos(t) \cdot sen(t)dt = \frac{1}{4}[-\cos(x)]_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \cos(t) \cdot sen(t)dt = \frac{1}{4}(-\cos(2\pi) + \cos(0))$$

$$\int_0^{\pi} \cos(t) \cdot sen(t)dt = 0$$

e)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(t)dt$$

Integración por partes,

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

$$g(t) = sen(t) \qquad f'(t) = sen(t)$$

$$g'(t) = \cos(t) \quad f(t) = -cos(t)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(t)dt = [-sen(t)cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(t)dt = [-sen(t)cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - sen^2(t))dt$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(t)dt = [-sen(t)cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(t)dt = \frac{1}{2}[-sen(t)cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(t)dt = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(t)dt = \frac{\pi}{4}$$

f)

$$\int_1^4 u\sqrt{u}du = \left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^4$$

$$\int_1^4 u\sqrt{u}du = \left[\frac{62}{5}\right]$$

g)

$$\int_2^4 u\sqrt{u}du = \left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^4$$

$$\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{u}}du = \left[2\sqrt{u}\right]_2^4$$

$$\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{u}}du = 4 - 2\sqrt{2}$$

h)

$$\int_{\pi}^{2\pi} u \cdot \cos(u^2)du$$

$$u^2 = x \quad \Rightarrow \quad 2udu = dx \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{2u}$$

$$si\ u = \pi \quad \Rightarrow \quad x = \pi^2$$

$$si\ u = 2\pi \quad \Rightarrow \quad x = 4\pi^2$$

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} u \cdot \cos(x) \frac{dx}{2u} = \frac{1}{2} \int_{\pi^2}^{4\pi^2} \cos(x) dx$$

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} u \cdot \cos(x) \frac{dx}{2u} = \frac{1}{2} [sen(x)]_{\pi^2}^{4\pi^2}$$

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} u \cdot \cos(x) \frac{dx}{2u} = \frac{1}{2} \left(sen(4\pi^2) - sen(\pi^2) \right)$$

i)

$$\int_0^1 x \cdot \sqrt{2-x} dx$$

$$2 - x = u \quad \Rightarrow \quad -dx = du \quad \Rightarrow \quad dx = -du$$

$$si\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 2$$

$$si\ x = 1 \quad \Rightarrow \quad u = 1$$

$$-\int_2^1 (2-u) \cdot \sqrt{u} du = \int_1^2 (2-u) \cdot \sqrt{u} du$$

$$-\int_2^1 (2-u) \cdot \sqrt{u} du = \int_1^2 2\sqrt{u} - u^{\frac{3}{2}} du$$

$$-\int_2^1 (2-u) \cdot \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 - \left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^2$$

$$-\int_2^1 (2-u) \cdot \sqrt{u} du = \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_1^2 - \left[\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} \right]_1^2$$

$$-\int_2^1 (2-u) \cdot \sqrt{u} du = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{3} - \left(\frac{2(2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2}{5} \right)$$

j)

$$\int_0^\pi t^2 \cdot sen(t)dt$$

Integración por partes,

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

$$g(t) = t^2 \quad f'(t) = sen(t)$$

$$g'(t) = 2t \quad f(t) = -cos(t)$$

$$\int_0^\pi t^2 \cdot sen(t)dt = [-t^2 cos(t)]_0^\pi + 2\int_0^\pi \mathrm{t} \cdot \cos(t)\, dt$$

Integración por partes,

$$g(t) = t \quad f'(t) = cos(t)$$

$$g'(t) = 1 \quad f(t) = sen(t)$$

$$\int_0^\pi t^2 \cdot sen(t)dt = [-t^2 cos(t)]_0^\pi + 2\left[[tsen(t))]_0^\pi - \int_0^\pi \mathrm{sen}(t)\, dt\right]$$

$$\int_0^\pi t^2 \cdot sen(t)dt = [-t^2 cos(t)]_0^\pi + 2[[tsen(t))]_0^\pi - [-\cos(t)]_0^\pi]$$

$$\int_0^\pi t^2 \cdot sen(t)dt = -\pi^2 cos(\pi) + 2[0 + \cos(\pi) - \cos(0)]$$

$$\int_0^\pi t^2 \cdot sen(t)dt = -\pi^2 cos(\pi) - 4$$