Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Septiembre, 2008.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

1. Muestra que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\cdots\sqrt{n-1}) \leq \frac{2}{3}$$

Solución:

Primero notar que

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\cdots\sqrt{n-1}) = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k-1}{n}}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Considerando la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ y la partición

$$P_n = \left\{\frac{k}{n} / \ 0 \leq k \leq n\right\}$$

entonces la suma inferior $s(f,P)$ es:

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k-1}{n}}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

y como

$$\frac{2}{3} = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \sup\{s(f,P)/ \ P\ \}$$

entonces

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

$$s(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k-1}{n}}\left(\frac{1}{n}\right)\leq\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Observación 0.1 *Notar que para $n=1$ la proposición no es clara. Si alguien dice que la afirmación es falsa para $n=1$ darle puntaje máximo, la culpa fue nuestra a lo aclarar la suma.*

Observación 0.2 *Es importante notar que en el problema no hay involucrado ningún límite. Es decir si alguien demuestra que*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k-1}{n}}\left(\frac{1}{n}\right)=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$$

demuestra algo cierto, pero que nadie preguntó. En ese caso calificar con $\boxed{\textit{2 puntos.}}$

2. Calcula la integral

$$\int x^3 sen(x^2)dx$$

Solución:

Haciendo el cambio $u=x^2$, se tiene $\frac{du}{2}=xdx$

$$\int x^3 sen(x^2)dx=\frac{1}{2}\int u\sin(u)du$$

$$\boxed{\text{2,5 puntos}}$$

Por otra parte, integrando por partes (valga la redundancia):

$$\int u\sin(u)du=-u\cos(u)+\int\cos(u)=-u\cos(u)+\sin(u)+C$$

$$\boxed{\text{2,5 puntos}}$$

Por lo tanto:

$$\int x^3 sen(x^2)dx=\frac{1}{2}\left[-x^2\cos(x^2)+\sin(x^2)+C\right]$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$