Segundo Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Agosto, 2008

Tiempo : 15 minutos .
Nombre:

Elija solo un problema.

1. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por $f(x) = x$. Encuentra una partición P de $[0,1]$ tal que

$$S(f,P) - s(f,P) < 10^{-2}$$

<u>Solución:</u>

Sea $n \in \mathbb{N}$ consideremos la partición de $[0,1]$:

$$P_n = \left\{ x_k = \frac{k}{n} / \ 0 \leq k \leq n \right\}$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Entonces para cada $k \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, n-1, n\}$ se tiene

$$M_k = \sup\{f(x)/ \ x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = \sup\{x/ \ x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = x_k = \frac{k}{n}$$

$$m_k = \sup\{f(x)/ \ x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = \sup\{x/ \ x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = x_{k-1} = \frac{k-1}{n}$$

$\boxed{\text{1 puntos}}$

Entonces

$$S(f,P_n) - s(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Luego basta tomar $n = 101$ para construir la partición

$$P_n = \left\{ x_k = \frac{k}{n} / \ 0 \leq k \leq 101 \right\}$$

para asegurar que

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} = \frac{1}{101} < 10^{-2}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

2. Grafica la función $F : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x [u] du$$

donde $[u]$ denota la parte entera de u.

<u>Solución:</u>

Si $0 \leq x < 1$, entonces

$$F(x) = \int_0^x [u] du = \int_0^x 0 du = 0$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Si $1 \leq x < 2$, entonces

$$F(x) = \int_0^x [u] du = \int_0^1 0 du + \int_1^x 1 du = 0 + x - 1 = x - 1$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Si $2 \leq x < 3$, entonces

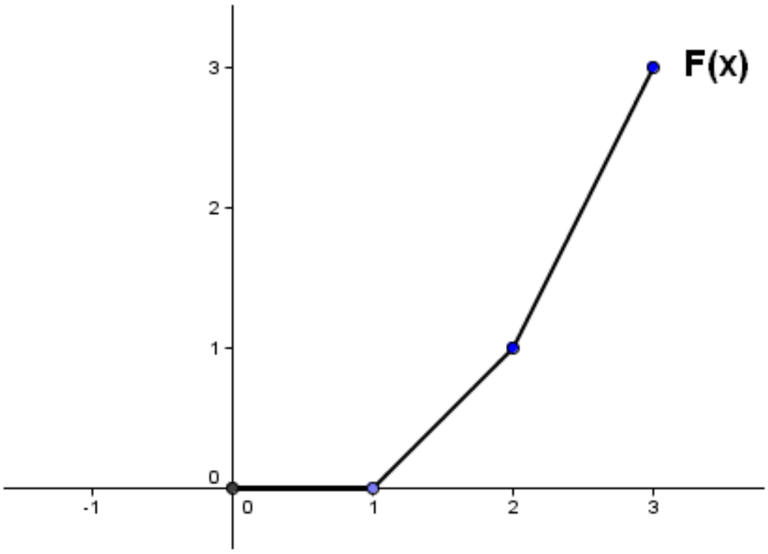
$$F(x) = \int_0^x [u] du = \int_0^1 0 du + \int_1^2 1 du + \int_2^x 2 du = 0 + 1 + 2(x - 2) = 2x - 3$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Entonces

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$



$\boxed{\text{2 puntos}}$