Control 3 de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Verano, 2009-2010

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

1. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua. Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x x^2 f(t)dt$.

   Solución:

   Derivando F con respecto a x, se tiene que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(x^2 \int_0^x f(t)dt \right)' \\ &= (x^2)' \int_0^x f(t)dt + x^2 \left(\int_0^x f(t)dt \right)' \\ &= 2x \int_0^x f(t)dt + x^2 \left(\int_0^x f(t)dt \right)' \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{2 puntos.}}$$

   Por teorema fundamental del calculo, se tiene que

$$\int_0^x f(t)dt = G(x) - G(0)$$

   con $G' = f$.

$$\boxed{\text{2 puntos.}}$$

   Entonces

$$\left(\int_0^x f(t)dt \right)' = (G(x) - G(0))' = G'(x) = f(x)$$

   Por tanto

$$F'(x) = 2x \int_0^x f(t)dt + x^2 f(x)$$

$$\boxed{\text{2 puntos.}}$$

2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Defina $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $G(x) = \int_x^b f(t)dt$. Demuestre que G es diferenciable y encuentre G'.

Solución:

Por teorema fundamental del calculo, se tiene que la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es diferenciable con $F' = f$.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Por otro lado notamos que

$$F(x) + G(x) = \int_a^b f(t)dt$$

donde $\int_a^b f(t)dt$ es constante.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Luego

$$G(x) = \int_a^b f(t)dt - F(x)$$

es diferenciable, puesto que es diferencia de funciones diferenciable. Ademas $G'(x) = -F'(x) = -f(x)$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$