Quinto Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Agosto, 2007.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija un problema entre los siguientes.

1. Demuestra que para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se tiene que

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}[\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{n-1}] < \frac{2}{3}$$

Solución:

Consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$ y la partición $P = \{x_k = \frac{k}{n} / \ k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$. Como f es creciente se tiene que $m_k = \frac{k-1}{n}$.

$\boxed{\text{1 punto}}$

Además como, $n \geq 2$ se tiene que, $x_1 = 1/n \neq 1 = x_n$, Por lo tanto, la suma inferior $s(f, P)$ es:

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k-1}{n}} \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$s(f,P) = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} = \frac{1}{n\sqrt{n}}[\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{n-1}]$$

$\boxed{\text{3 puntos}}$

Como vemos, se tiene que

$$s(f,P) < \int_0^1 \sqrt{x} dx$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}[\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{n-1}] < \frac{2}{3}$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

2. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Encuentre una partición P de $[0,1]$ tal que

$$S(f,P) - s(f,P) < \frac{1}{100}$$

Solución:

Consideremos la partición $P = \{x_k = \frac{k}{n} /\ k = 0,1,2,\ldots,n\}$, del intervalo $[0,1]$. Para esa particin, se tiene que

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}$$

Esta última es una suma telescópica, por lo tanto

$$S(f,P) - s(f,P) = \frac{1}{n}(x_n - x_0) = \frac{1}{n}$$

$\boxed{\text{4 puntos}}$

Si queremos que $S(f,P) - s(f,P) < \frac{1}{100}$ basta tomar $n = 101$ para obtener el resultado esperado, es deci, la particin

$$P = \{x_k = \frac{k}{101} /\ k = 0,1,2,\ldots,101\},$$

es tal que

$$S(f,P) - s(f,P) < \frac{1}{100}$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$