1. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)-x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   ¿Es f diferenciable?

   <u>Solución:</u>

   Si $a \neq 0$ entonces la función es el cuociente de dos funciones diferenciables en a, por lo tanto la función es diferenciable en a.

   $$\boxed{\text{1 punto}}$$

   Por otra parte

   $$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h) - h}{h^3}$$

   Aplicando la regla de L'hopital, se tiene

   $$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h) - h}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{3h^2}$$

   $$\boxed{\text{2 puntos}}$$

   Aplicando la regla de L'hopital, una vez más, se tiene

   $$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{3h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(h)}{6h} = \frac{-1}{6} \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \frac{-1}{6}$$

   $$\boxed{\text{2 puntos}}$$

   Luego f es diferenciable en a, para todo $a \in \mathbb{R}$.

   $$\boxed{\text{1 punto}}$$

2. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotadas. Defina

$$m_{f+g} = \text{ínf}\{f(x) + g(x) / \ x \in [a, b]\},$$

$m_f = \text{ínf}\{f(x) / \ x \in [a, b]\}$, y $m_g = \text{ínf}\{g(x) / \ x \in [a, b]\}$. ¿Es cierto que $m_{f+g} = m_f + m_g$?

Solución:

En general es falso que $m_{f+g} = m_f + m_g$,

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

de hecho, si consideramos $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ definidas por $f(x) = x$ y $g(x) = 1 - x$.

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Se tiene que $m_f = 0 = m_g$, pero la función $f + g$ es la función constante igual a 1, por tanto $m_{f+g} = 1$, y por lo tanto en este ejemplo:

$$m_{f+g} \neq m_f + m_g$$

$$\boxed{\text{3 puntos}}$$