Control 1 de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Verano, 2009-2010

Tiempo : 15 minutos .

Nombre:

Elija solo un problema.

1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{sen^2(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Demuestre que f es diferenciable en todo su dominio.

<u>Solución:</u>

Sea $a\in\mathbb{R}=Dom(f)$ entonces se tiene que:
Si $a\neq 0$ entonces f es diferenciable puesto que es cuociente de funciones diferenciables.

$$\boxed{\text{2 puntos.}}$$

Si $a=0$ entonces debemos probar que $f'(0)$ existe, es decir mostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

existe.

$$\boxed{\text{2 puntos.}}$$

En efecto notamos que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen^2(x)}{x}-0}{x-0}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{sen^2(x)}{x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}\frac{sen(x)}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto f es diferenciable en todo su dominio.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

[***Otra forma de calcular el limite anterior es usando regla de L'Hôpital***]

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen^2(x)}{x}-0}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)}{x^2} \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2sen(x)cos(x)}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}cos(x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas. Demuestre que

$$inf(f+g) \geq inf(f) + inf(g)$$

Solución:

Recordar que $inf(f) = inf\{f(x) : x \in X\}$ e $inf(g) = \{g(x) : x \in X\}$.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Notar que si $A = \{f(x) : x \in X\}$ y $B = \{g(x) : x \in X\}$ entonces se tiene que

$$\{(f+g)(x) : x \in X\} \subset A + B$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Luego

$$inf(f+g) = inf\{(f+g)(x) : x \in X\} \geq inf(A+B) = inf(A)+inf(B) = inf(f)+inf(g)$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$