



ASIGNATURA : MATEMATICAS
NIVEL : 1er. AÑO
CARRERA : DISEÑO
AÑO : 2007

MATERIAL DE APOYO
PROF. L. ALTIMIRAS R.
AYUD. C. RAMIREZ N.

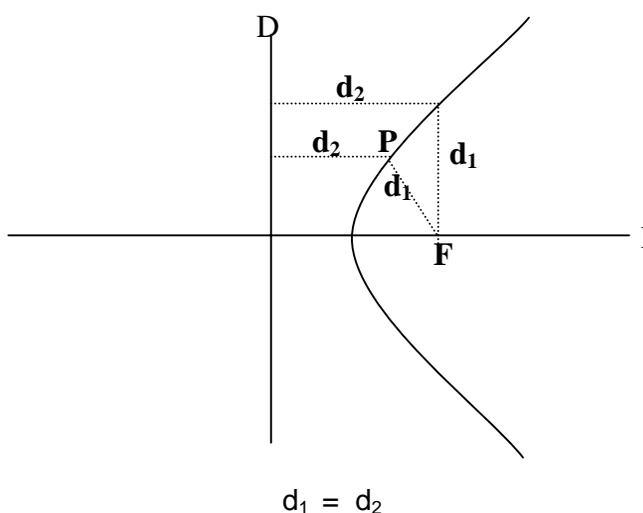
LA PARÁBOLA

Definición :

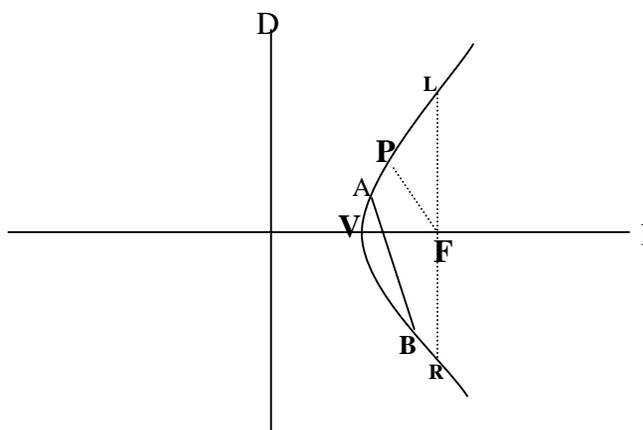
Una Parábola se define como el Lugar Geométrico de todos aquellos puntos del plano que son equidistantes de un punto fijo, llamado Foco, y de una recta fija, llamada Directriz. El punto fijo no pertenece a la recta fija.

Así, si P es un punto del plano,

$P \in \text{Parábola} \Leftrightarrow |\overline{PF}| = |PD|$, donde F = foco y D = recta directriz



ELEMENTOS DE LA PARABOLA



- 1.- Eje Focal o : Recta perpendicular a la Directriz que pasa por el foco (I)
Esta recta corresponde al Eje de Simetría de la Parábola
- 2.- Vértice : Punto de intersección entre el eje focal y el Lugar Geométrico (Parábola) (V)



- 3.- Cuerda : Cualquier segmento cuyos extremos pertenezcan al lugar geométrico.
 (\overline{AB})
- 4.- Lado Recto medio : Cuerda perpendicular al eje focal en el foco. (\overline{LR}). El punto de dicha cuerda es el Foco **F**
- 5.- Radio Vector : Segmento que une un punto cualquiera del lugar geométrico con el foco (\overline{LF} ; \overline{PF})

ECUACIONES CARTESIANAS DE LA PARABOLA

Teorema 1.

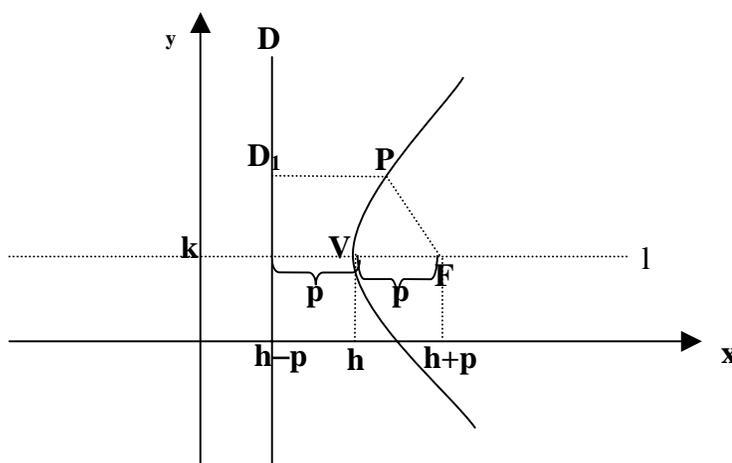
La ecuación de la Parábola con vértice $V(h, k)$, eje focal paralelo al eje X u horizontal, distancia focal $|p|$, es decir, $|VF| = |p|$, es :

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

donde:

- a) Si $p > 0$, entonces la parábola se abre hacia la derecha
- b) Si $p < 0$, entonces la parábola se abre hacia la izquierda

Demostración.



Supongamos que la parábola se abre hacia la derecha como lo indica la figura, entonces $p > 0$; por lo que las coordenadas del Vértice y Foco serán, respectivamente, (h, k) y $(h + p, k)$ pues por hipótesis $|VF| = |p|$

Sea $P(x, y) \in$ Parábola $\Rightarrow |\overline{PF}| = |\overline{PD_1}|$, con $D_1(h - p, y)$

Aplicando fórmula de distancia, se tiene que

$$\sqrt{(x - (h + p))^2 + (y - k)^2} = \sqrt{(x - (h - p))^2 + (y - y)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{((x - h) - p)^2 + (y - k)^2} = \sqrt{((x - h) + p)^2}$$

Elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado, se tiene que

$$(x - h)^2 - 2p(x - h) + p^2 + (y - k)^2 = (x - h)^2 + 2p(x - h) + p^2$$

lo que al reducir términos semejante, se obtiene la ecuación

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \quad (*)$$



Recíprocamente, si $P(x, y)$ es la solución de la ecuación (*), invirtiendo los pasos anteriores se llega a demostrar que el punto $P(x, y)$ pertenece a la Parábola.

En forma análoga se puede demostrar el :

Teorema 2.

La ecuación de la Parábola con vértice $V(h, k)$, eje focal paralelo al eje Y o vertical, distancia focal $|p|$, es decir, $|VF| = |p|$, es :

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

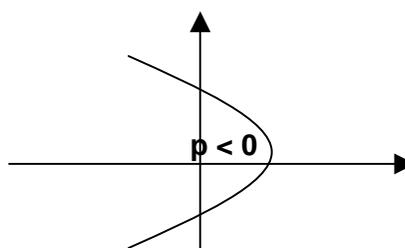
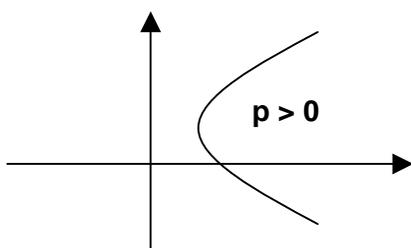
donde:

b) Si $p > 0$, entonces la parábola se abre hacia arriba

b) Si $p < 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo

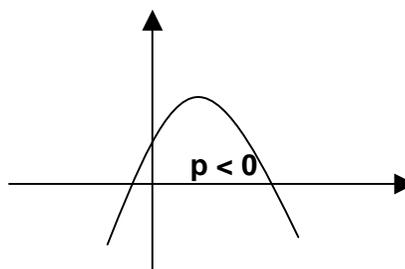
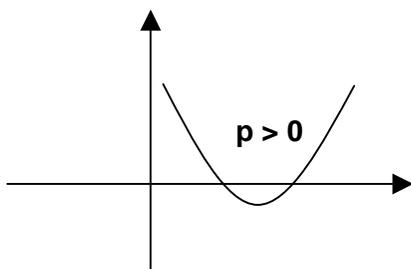
Así se obtienen las siguientes situaciones gráficas:

1.-



Parábolas con eje Horizontal cuya ecuación es : $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

2.-



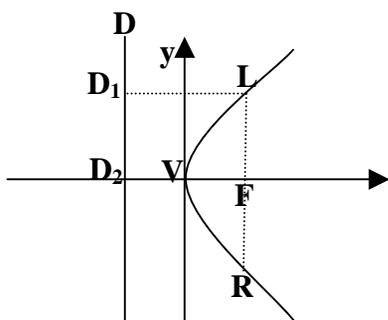
Parábolas con eje Vertical cuya ecuación es : $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

OBSERVACIONES IMPORTANTES

- 1.- Las ecuaciones descritas en los teoremas 1 y 2 reciben el nombre de Ecuaciones Ordinarias de la Parábola.
- 2.- Si $h = k = 0$, las ecuaciones se reducen a : $y^2 = 4px$ y a , $x^2 = 4py$ respectivamente, llamadas Ecuaciones Canónicas de la Parábola
- 3.- De la misma gráfica se desprende que toda Parábola es simétrica con respecto a su propio eje de simetría que es el Eje Focal (aquella recta perpendicular a la Directriz , que contiene al Vértice y Foco, respectivamente.
- 4.- Cualquiera sea la ubicación del eje focal (paralelo al eje X u horizontal ó paralelo al eje Y o vertical) se tiene que la longitud del Lado Recto es igual a $4|p|$, es decir:
 $|LR| = 4|p|$



En efecto:



$$\begin{aligned}
 |\overline{LR}| &= 2 |\overline{LF}| \\
 &= 2 |\overline{LD_1}| \\
 &= 2 |\overline{D_2F}| \\
 &= 2 \cdot 2 |\overline{VF}| \\
 &= 4 |p|
 \end{aligned}$$

5.- Para graficar una Parábola, entonces, se deben conocer a lo menos :

- Coordenadas del Vértice
- Coordenadas del foco
- El signo de p , para saber hacia dónde se abre
- Longitud del Lado Recto, para obtener en forma aproximada la abertura de la parábola
- La ecuación de la Directriz

ECUACION GENERAL DE LA PARABOLA

Si a partir de las ecuaciones ordinarias :

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \quad \text{y} \quad (x - h)^2 = 4p(y - k)$$

se desarrollan los cuadrados y se reordenan los términos, se obtienen expresiones del tipo :

$$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4py = 0 \quad (2)$$

las que, efectuando sustituciones adecuadas, representan ecuaciones del tipo :

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1') \quad \text{Eje focal paralelo al eje X u horizontal}$$

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2') \quad \text{Eje focal paralelo al eje Y o vertical}$$

Ambas expresiones reciben el nombre de Ecuaciones generales de la Parábola

Inversamente, si $A = 0$ ó $B = 0$, pero no ambos simultáneamente, la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa, o bien una Parábola, o bien una Recta. La forma de verificación es trabajar algebraicamente la ecuación con el fin de poder transformarla en alguna de las ecuaciones que son descritas por los teoremas.