Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Octubre, 2008.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija entre 1 y 2

1. Encuentre un intervalo I y una serie de potencias de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

tal que sea igual a la función $f : I \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{3+x}$.

<u>Solución:</u>

Notamos primero que la forma de la serie de potencias muestra que ésta está centrada en cero, por lo tanto I es un intervalo centrado en cero.

Además notamos que

$$\frac{1}{3+x} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+\frac{x}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{-x}{3}}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \;\forall x \in (-1, 1)$$

Se tiene que

$$\frac{1}{3+x} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{-x}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x}{3}\right)^n, \text{ con } -1 < \frac{-x}{3} < 1$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Es decir, para cada $x \in I = (-3, 3)$ se tiene que

$$\frac{1}{3+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^{n+1}}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

2. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}?$$

<u>Solución:</u>

Tomando $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ se tiene que:

$$\text{lím} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{lím} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \text{lím} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\boxed{\text{3 puntos}}$$

$$= \text{lím} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Luego el radio de convergencia es $R = \dfrac{1}{e^{-1}} = e$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$