Ayudante: Ignacio Trujillo Silva
Críticas y comentarios a itrujill@ing.uchile.cl

Debemos Saber:

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn, \text{ con } c = cte. \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \forall k > 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad C_i = \frac{b \cdot i + a(n-i)}{n}, \text{ para partición uniforme y n infinito.}$$

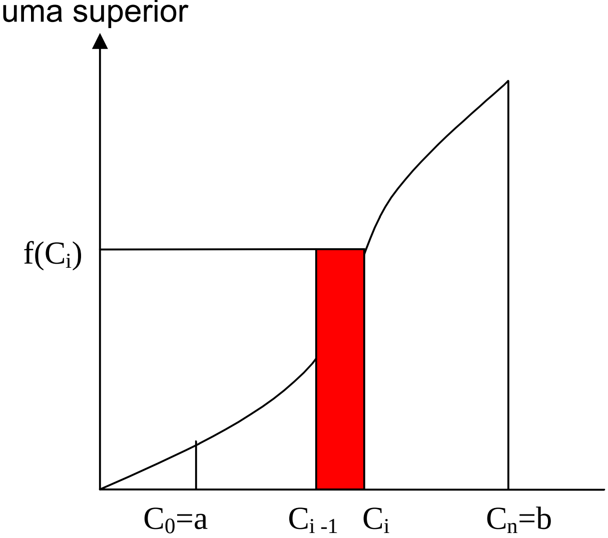
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}, \text{ para partición uniforme}$$

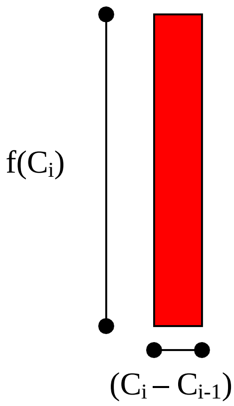
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Si las sumatorias parten desde 0 hasta n-1, se debe reemplazar el n anterior por n-1.

Sumas de Riemann

Suma superior



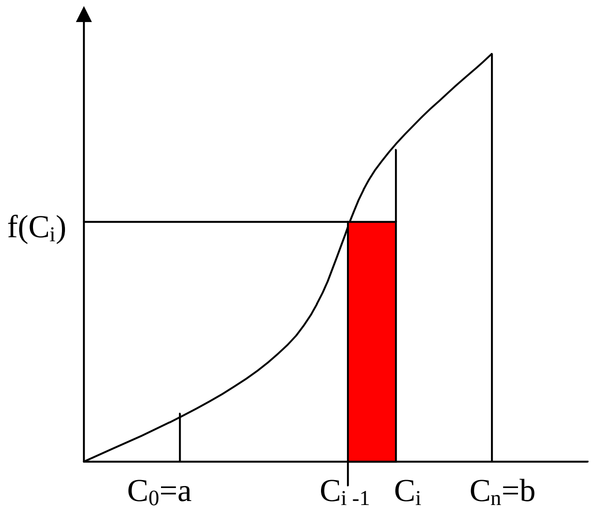


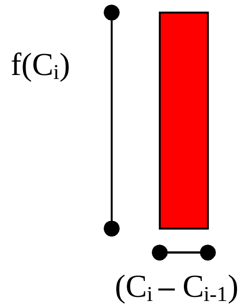
$$\text{Suma superior} = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x$$

Donde el $f(u_i)$ es el supremo de $f(x)$ en el intervalo $\left[C_{i-1}, C_i\right]$

Ayudante: Ignacio Trujillo Silva
Críticas y comentarios a itrujill@ing.uchile.cl

Suma Inferior





$$\text{Suma inferior} = \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x$$

Donde el $f(d_i)$ es el ínfimo de $f(x)$ en el intervalo $\left[C_{i-1}, C_i\right]$

Ejercicio 1: (ejercicio 12 de la guía)

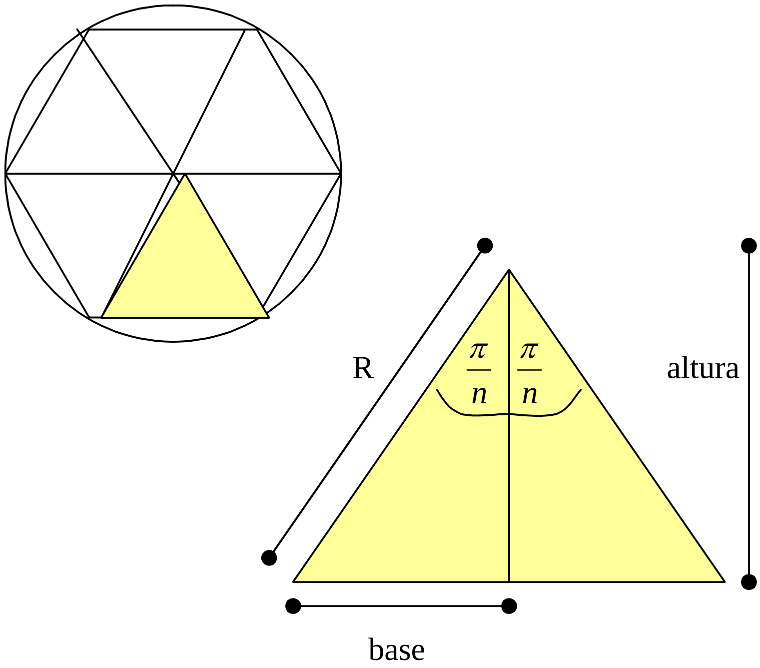
Calcule el área de un circulo de radio R del siguiente modo (el método siguiente se llama Método de Exhaución y fue inventado por Eudoxio en el siglo IV a.c.):

a) Encuentre el área del polígono de n lados inscrito en la circunferencia.
b) Encuentre el área del polígono de n lados circunscrito en la circunferencia.
c) Pruebe que el área de la circunferencia esta entre el resultado de a) y de b)
d) Pruebe que cuando el n es muy grande tiende a πR^2

Solución:

Ayudante: Ignacio Trujillo Silva
Críticas y comentarios a itrujill@ing.uchile.cl

a)



$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{altura}{R} \Rightarrow altura = R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{base}{R} \Rightarrow base = Rsen\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

El área del triangulo anterior es igual a la base multiplicada por la altura. (no la dividimos por dos, porque tenemos dos triángulos rectángulos iguales)

$$base \cdot altura = R^2 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

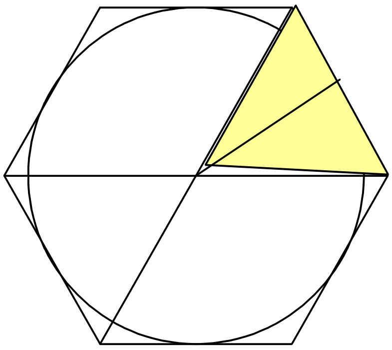
Luego, como tenemos n triángulos iguales;

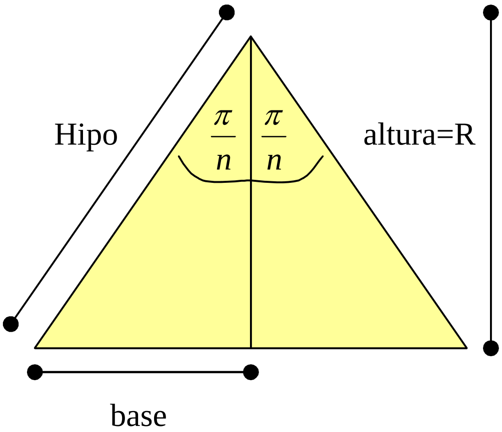
$\text{Área polígono} = nR^2 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$, usando la propiedad trigonométrica $sen(2x) = 2\cos(x)sen(x)$, nos queda

$$\text{Área polígono inscrito} = \frac{nR^2}{2} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Ayudante: Ignacio Trujillo Silva
Críticas y comentarios a itrujill@ing.uchile.cl

b)





El principal cambio con respecto a la parte a), se refiere a que ahora la altura del triangulo es igual al radio de la circunferencia.

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{R}{Hipo} \Rightarrow Hipo = \frac{R}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{base}{Hipo} \Rightarrow base = R\frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} = R\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

El área del triangulo anterior es igual a la base multiplicada por la altura. (no la dividimos por dos, porque tenemos dos triángulos rectángulos iguales)

$$base \cdot altura = R^2 tag\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Luego, como tenemos n triángulos iguales;

$$\text{Área polígono circunscrito} = nR^2 tag\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

c) En este punto debemos demostrar que

$$\text{Área polígono inscrito} = \frac{nR^2}{2} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) \leq \pi R^2 \leq nR^2 tag\left(\frac{\pi}{n}\right) = \text{Área polígono circunscrito}$$

(Este punto háganlo ustedes)

e) Para obtener un n grande debemos hacerlo tender al infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nR^2}{2} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) \leq \text{área círculo} \leq \lim_{n\to\infty} nR^2 tag\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nR^2}{2} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)\left(\frac{\pi}{\pi}\right) \leq \text{área círculo} \leq \lim_{n\to\infty} nR^2 tag\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\frac{\pi}{\pi}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \pi R^2 \frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} \leq \text{área círculo} \leq \lim_{n\to\infty} \pi R^2 \frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\pi R^2 \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}}_{1} \leq \text{área círculo} \leq \pi R^2 \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}}_{1}$$

$$\pi R^2 \leq \text{área círculo} \leq \pi R^2$$

El limite de la derecha no presenta problemas, pues convergen todos sus funciones en conjunto y por separado (entonces podemos separar los limites).

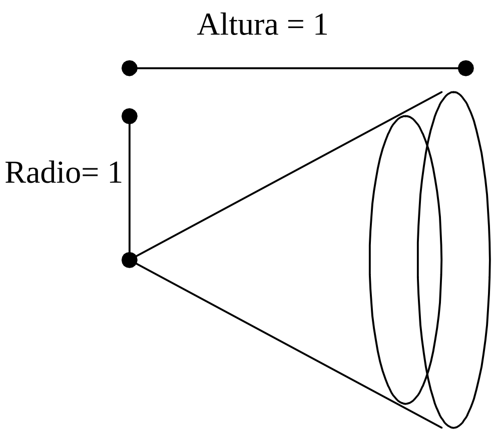
Finalmente por sándwich

$$\Rightarrow \text{Área circulo} = nR^2$$

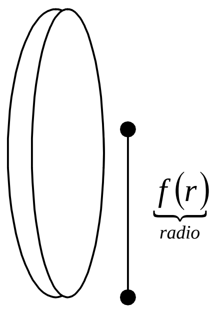
Ejercicio 2 (ejercicio 13 de la guía):

Prueba que el volumen de un cono de altura 1 y radio 1 tiene por volumen $\frac{1}{3}\pi$

<u>Solución</u>:

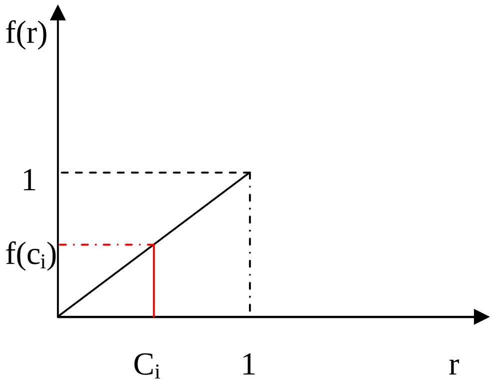


$$\text{Volumen del disco} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{ancho} \cdot \underbrace{\pi \cdot f(r)^2}_{área}$$



Ayudante: Ignacio Trujillo Silva
Críticas y comentarios a itrujill@ing.uchile.cl

La idea es sumar una serie de discos de distinto radio, el problema está en encontrar una función que nos represente los radios a medida que vamos sumando. Que tal si lo vemos el el plano cartesiano.



Con b = 1; y a = 0.

$$C_i = \frac{b \cdot i + a(n-i)}{n}$$

$$C_i = \frac{i}{n}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$$

$$Ancho = \Delta x = \frac{1}{n}$$

Como la función es lineal $f(C_i) = C_i = \frac{i}{n}$

$$\sum_{i=1}^{n} f(C_i)^2 \Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Ayudante: Ignacio Trujillo Silva
Críticas y comentarios a itrujill@ing.uchile.cl

Haciendo tender n al infinito, lo que no es más que sumar infinitos discos tenemos,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right]=\frac{1}{3}$$

Ejercicio 2:

Por medio de la suma de Riemann calcule el área entre la función $f(x)=x^2$ y la coordenada x, para el intervalo $[a,b]$.

<u>Solución</u>:

Como ya sabemos cuando hacemos tender el n al infinito para las sumatorias inferiores, como superiores, estas tienden a la integral, la cual se iguala a las antedichas sumatorias.

$$\text{Suma inferior}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(C_i)\Delta x=\int f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x=\text{Suma Superior}$$

Usando el argumento anteriormente recientemente enunciado, podemos ocupar indistintamente la suma superior, como la inferior (Para efectos de este ejercicio)

Ayudante: Ignacio Trujillo Silva
Críticas y comentarios a itrujill@ing.uchile.cl

$$\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{bi + a(n-i)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{bi + a(n-i)}{n}\right)^2$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{b^2 i^2 + a^2(n-i)^2 + 2bia(n-i)}{n^2}$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{b^2 i^2 + a^2 n^2 - 2a^2 ni + a^2 i^2 + 2bain - 2bai^2}{n^2}$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2\left(b^2 + a^2 - 2ab\right) + i\left(2ban - 2a^2 n\right) + a^2 n^2}{n^2}$$

$$= \frac{b-a}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left[i^2(b-a)^2 + i2an(b-a) + a^2 n^2\right]$$

$$= \frac{b-a}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left[i^2(b-a)^2 + i2an(b-a) + a^2 n^2\right]$$

$$= \frac{b-a}{n^3}\left\{(b-a)^2\underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} i^2\right]}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + 2an(b-a)\underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} i\right]}_{\frac{n(n+1)}{2}} + a^2 n^2\underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} 1\right]}_{n}\right\}$$

$$= \frac{b-a}{n^3}\left\{(b-a)^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2an(b-a)\frac{n(n+1)}{2} + a^2 n^3\right\}$$

$$= \frac{b-a}{n^3}\left\{\frac{(b-a)^2}{6}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right) + a(b-a)\left(n^3 + n^2\right) + a^2 n^3\right\}$$

$$= (b-a)\left\{\frac{(b-a)^2}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + a(b-a)\left(1 + \frac{1}{n}\right) + a^2\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[(b-a)\left\{\frac{(b-a)^2}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + a(b-a)\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + a^2\right\}\right]$$

$$= (b-a)\left\{\frac{(b-a)^2}{3} + a(b-a) + a^2\right\}$$

$$= (b-a)\left\{\frac{(b-a)^2}{3} + ab\right\}$$

$$= \left\{\frac{(b-a)^3}{3} + ab^2 - ba^2\right\}$$

$$= \frac{b^3 - 3b^2 a + 3ba^2 - a^3}{3} + ab^2 - ba^2$$

$$= \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Ayudante: Ignacio Trujillo Silva
Críticas y comentarios a itrujill@ing.uchile.cl

Luego, la integral $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$,

Podemos generalizar para todo polinomio, entonces tenemos,

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$