UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO
DEPTO. CIENCIAS DE LA CONSTRUCCION

| | |
|---|---|
| ASIGNATURA : MATEMATICAS | MATERIAL DE APOYO |
| NIVEL : 1er. AÑO | PROF. L. ALTIMIRAS R. |
| CARRERA : DISEÑO | AYUD. C. RAMIREZ N. |
| AÑO : 2007 | |

# LA HIPERBOLA

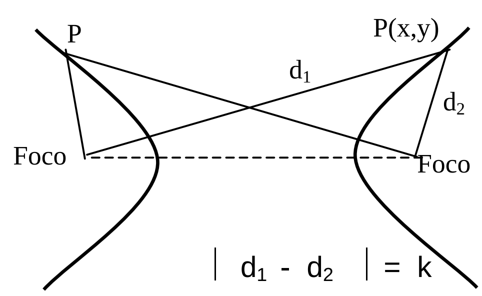
Definición :

Una Hipérbola es el lugar geométrico de un punto en el plano que se mueve de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados Focos, es siempre igual a una constante positiva, menor que la distancia entre los puntos fijos.

Así, si P es un punto del plano,

$$P \in \text{Hipérbola} \Leftrightarrow \left|\, |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| \,\right| = k \quad , \quad \text{con} \quad k < \left| \overline{F_1F_2} \right|$$

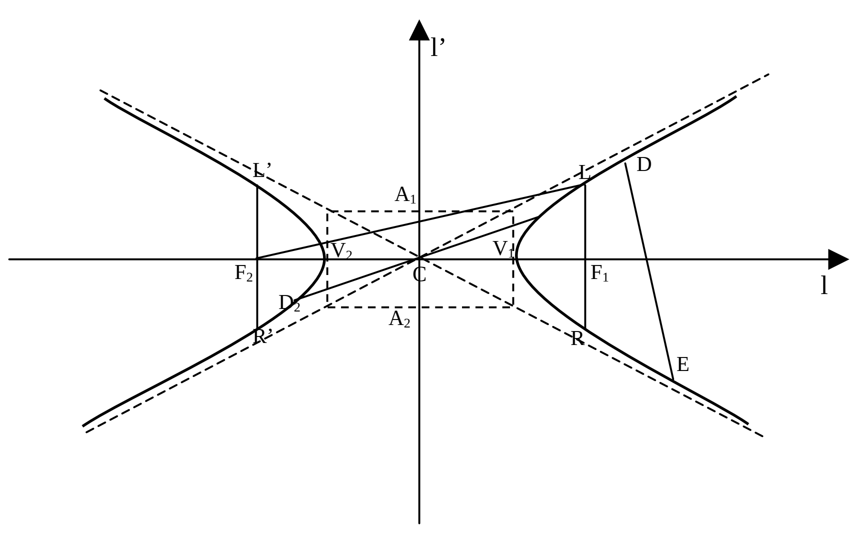
donde $F_1$ , $F_2$ = focos ; k = constante




Observación:

La hipérbola consta de dos ramas diferentes, cada una de longitud infinita.

## ELEMENTOS DE LA HIPERBOLA




1.- Eje Focal : Recta que contiene a los focos ( **l** )

2.- Vértices : Puntos de intersección entre el eje focal y el Lugar Geométrico ( Hipérbola ). ( $\mathbf{V_1}$ **;** $\mathbf{V_2}$ )

3.- Centro : Punto medio del segmento que une los focos o de la cuerda que

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO
DEPTO. CIENCIAS DE LA CONSTRUCCION

une los vértices ( **C** )

4.- Eje normal : Recta perpendicular al eje focal en el centro de la hipérbola ( **l'** )

5.- Cuerda : Cualquier segmento cuyos extremos pertenezcan al lugar geométrico. Dichos extremos pueden estar ambos en una misma rama o bien pertenecer a ramas distintas. ( $\overline{DE}$ ; $\overline{V_1V_2}$ )

6.- Eje Transverso : Cuerda contenida en el eje focal, cuyos extremos son los vértices ( $\overline{V_1V_2}$ )

7.- Eje conjugado : Segmento definido en el eje normal, cuyo punto medio es el centro ( $\overline{A_1A_2}$ )

8.- Lados Rectos : Cuerdas perpendiculares al eje focal en cada uno de los focos ( $\overline{LR}$ ; $\overline{L'R'}$ ). El punto medio de dichas cuerdas son $F_1$ y $F_2$, respectivamente.

9.- Diámetro : Cualquier cuerda que pasa por el centro ( $\overline{D_1D_2}$ )

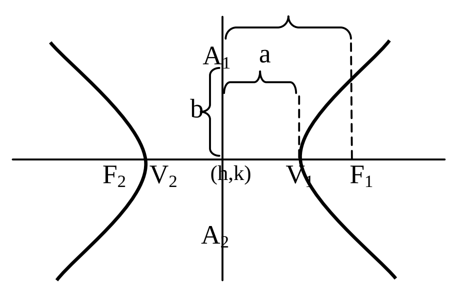
10.- Radio Vector : Segmento que une un punto cualquiera del lugar geométrico con alguno de los focos ( $\overline{LF_1}$ ; $\overline{LF_2}$ )

También en esta cónica se definen tres longitudes importantes, las que son de gran utilidad tanto en la descripción de las ecuaciones como en la construcción de su gráfica. Ellas son:

a) Longitud del Eje Transverso = $\left|\overline{V_1V_2}\right| = 2a$

b) Longitud Eje Conjugado = $\left|\overline{A_1A_2}\right| = 2b$

c) Distancia Focal = $\left|\overline{F_1F_2}\right| = 2c$



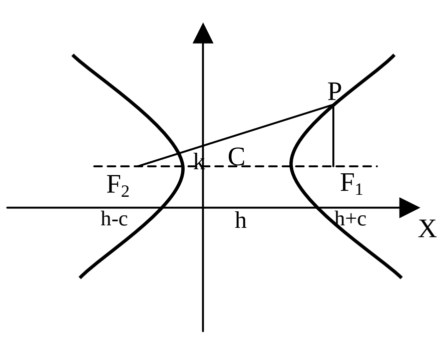

**ECUACIONES DE LA HIPERBOLA**

**Teorema 1.**

La ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo al eje X u horizontal, centro en C( h , k ), distancia focal 2c y constante positiva 2a , es de la forma :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad a < c$$

Demostración.




Sea P( x , y ) $\in$ hipérbola

$$\left| \left|\overline{PF_1}\right| - \left|\overline{PF_2}\right| \right| = 2a$$

con $F_1$( h + c , k ) y $F_2$( h – c , k )

$$\therefore \quad \left|\overline{PF_1}\right| - \left|\overline{PF_2}\right| = \pm 2a$$

Aplicando fórmula de distancia, se tiene que

$$\sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2} - \sqrt{(x-(h-c))^2 + (y-k)^2} = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{((x-h)-c)^2 + (y-k)^2} = \pm 2a + \sqrt{((x-h)+c)^2 + (y-k)^2}$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2 = 4a^2 + (x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2 \pm 4a\sqrt{((x-h)+c)^2 + (y-k)^2}$$

$$\Rightarrow \mp 4a\sqrt{((x-h)+c)^2 + (y-k)^2} = 4a^2 + 4c(x-h)$$

Simplificando por 4 y elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, se tiene que

$$a^2((x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2) = a^4 + c^2(x-h)^2 + 2a^2c(x-h)$$

$$\Rightarrow a^2(x-h)^2 + 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 + c^2(x-h)^2 + 2a^2c(x-h)$$

Reduciendo términos semejantes, asociando convenientemente y efectuando factorizaciones adecuadas obtenemos

$$(c^2 - a^2)(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2(c^2 - a^2) \qquad (*)$$

Pero por hipótesis sabemos que $a < c \Rightarrow a^2 < c^2$, por lo que $c^2 - a^2 > 0$

Definimos, entonces una constante $b > 0$ tal que $b^2 = c^2 - a^2$

Reemplazando en **( ∗ )** , obtenemos

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

Dividiendo la expresión anterior por $a^2b^2$ , obtenemos la tesis del teorema; ésto es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (**)$$

Luego, las coordenadas de todo punto $P(x, y)$ en la hipérbola satisfacen la última ecuación.

Recíprocamente, si $P(x, y)$ es la solución de la ecuación **( ∗ ∗ ),** invirtiendo los pasos anteriores se llega a demostrar que el punto $P(x, y)$ está sobre la hipérbola.

En forma análoga se puede demostrar el :

**Teorema 2.**
La ecuación de la hipérbola de centro $C(h, k)$, eje focal paralelo al eje Y o vertical, distancia focal $2c$ y constante positiva igual a $2a$ , es de la forma

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad a < c$$

**OBSERVACIONES IMPORTANTES**

1.- De la misma gráfica se desprende que toda hipérbola es simétrica con respecto a sus ejes ( focal y normal ), así como también con respecto a su centro.

2.- Cualquiera sea la ubicación del eje focal ( paralelo al eje X u horizontal ó paralelo al eje Y o vertical ) se tiene que la longitud de las cuerdas definidas como Lados Rectos, se pueden obtener por medio de la fórmula:

$|LR| = |L'R'| = \dfrac{2b^2}{a}$ , teniéndose presente que

$$\left|\overline{LF_1}\right| = \left|\overline{RF_1}\right| = \left|\overline{L'F_2}\right| = \left|\overline{R'F_2}\right| = \frac{b^2}{a}$$

3.- Otro elemento importante a considerar es la **Excentricidad** de la cónica ; es decir, la mayor o menor abertura de sus ramas.

La excentricidad se define como una razón entre c y a ; es decir

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ ; siendo el valor de ésta siempre **mayor que la unidad**,

puesto que $c > a$.

4.- Existen además, un par de rectas llamadas ASINTOTAS de la hipérbola. Estas rectas son una excelente guía para trazar la gráfica de la cónica ya que ellas nacen a partir de la construcción de un rectángulo central de lados **2a** y **2b**, respectivamente.

Si consideramos el eje focal paralelo al eje X , entonces las diagonales de este rectángulo tienen pendiente $\pm \dfrac{b}{a}$ ; por lo que al prolongar estas diagonales se obtienen dos rectas cuyas ecuaciones son

$$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$$

Si por el contrario, el eje focal es paralelo al eje Y , entonces las diagonales de rectángulo central tienen pendiente $\pm \dfrac{a}{b}$ , y en consecuencia, las asíntotas de la hipérbola tienen ecuaciones

$$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$$

Cabe hacer notar que cada semidiagonal del rectángulo central mide exactamente **c** unidades, equivalente a la mitad de la distancia focal, la que comprueba la relación pitagórica que existe entre las constantes **a , b** y **c,** respectivamente; ésto es **$c^2 = a^2 + b^2$.**

5.- Si **a = b**, entonces la cónica recibe el nombre de **Hipérbola Equilátera.**

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO
DEPTO. CIENCIAS DE LA CONSTRUCCION

**ECUACION GENERAL DE LA HIPERBOLA**

Si $A \neq B$ y $AB < 0$ , entonces la ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa , o bien una hipérbola , o bien un par de rectas que se cortan. La forma de verificación es trabajar algebraicamente la ecuación con el fin de poder transformarla en alguna de las ecuaciones que son descritas por los teoremas.

## RESUMEN

Independientemente de que el eje focal de la hipérbola sea paralelo al eje X o paralelo al eje Y , siempre se cumple que

1.- Centro = C( h , k )

2.- Longitud del eje transverso = $\left| \overline{V_1V_2} \right| = 2a$

3.- Longitud del eje conjugado = $\left| \overline{A_1A_2} \right| = 2b$

4.- Distancia focal = $\left| \overline{F_1F_2} \right| = 2c$

5.- Longitud de cada uno de sus lados rectos = $|LR| = |L'R'| = \dfrac{2b^2}{a}$

6.- Las constantes **a, b, c,** están ligadas por la relación Pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$

7.- La excentricidad $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$

8.- Las coordenadas de los vértices son:

$V( h \pm a , k )$ si eje focal es paralelo al eje X

$V( h , k \pm a )$ si eje focal es paralelo al eje Y

9.- Las coordenadas de los focos son :

$F( h \pm c , k )$ si eje focal es paralelo al eje X

$F( h , k \pm c )$ si eje focal es paralelo al eje Y

10.- Las ecuaciones del par de asíntotas son :

$y - k = \pm \dfrac{b}{a} ( x - h )$ si eje focal es paralelo al eje X

$y - k = \pm \dfrac{a}{b} ( x - h )$ si eje focal es paralelo al eje Y