Guía 1 Matemática II Resuelta

Programa Académico de Bachillerato

1. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hopital?.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{2}=3$$

Solución:

El error está en la segunda aplicación de la regla del L' Hopital, debido a que no es aplicable, pues no da cero dividido cero.

2. Calcule los siguientes límites:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos^2(x)-1}{x^2}$$

Primero,

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos^2(x)-1}{x^2}=\frac{0}{0}$$

Se puede aplicar la regla del L' Hopital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos^2(x)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2cos(x)sen(x)}{2x}=\frac{0}{0}$$

Se puede aplicar la regla del L' Hopital otra vez,

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos^2(x)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2[-sen^2(x)+cos^2(x)]}{2}=-1$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x^2}$$

Primero,

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x^2} = \frac{0}{0}$$

Se puede aplicar la regla del L' Hopital,

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{cos(x)}{2x} = \infty$$

c)

$$\lim_{x \to \infty} x\, sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

Primero,

$$\lim_{x \to \infty} x\, sen\left(\frac{1}{x}\right) = \infty \cdot 0$$

Siempre un infinito por cero, se puede escribir como un cero dividido por cero.

$$\lim_{x \to \infty} x\, sen\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

Podemos aplicar la regla del L' Hopital,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to \infty} cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos(0) = 1$$

d)

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x) - x^2}{\cos(x) - 1} = \frac{0}{0}$$

Podemos aplicar la regla del L' Hopital,

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x) - x^2}{\cos(x) - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{cos(x) - 2x}{-sen(x)}$$

El límite anterior no existe, ya que al realizar el límite por la derecha y la izquierda es diferente.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{cos(x)-2x}{-sen(x)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{cos(x)-2x}{-sen(x)}=\infty$$

3. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\frac{sen(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$
¿Es f continua?¿Es f diferenciable? ¿Podría Ud. graficar f?.

Solución:

La función es continua por algebra de funciones continuas para todo los reales menos el cero.

Ahora, analicemos el caso particular cuando x=0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1=f(0)$$

Implica que la función es continua en cero.

La función es diferenciable por algebra de funciones diferenciables para todo los reales menos el cero.

Ahora, analicemos el caso particular cuando x=0, para que la función sea diferenciable en x=0 debe existir el limite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen(x)}{x}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^2}$$

Entonces, calculemos este límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^2}=\frac{0}{0}$$

Debemos aplicar la regla del L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{2x}=\frac{0}{0}$$

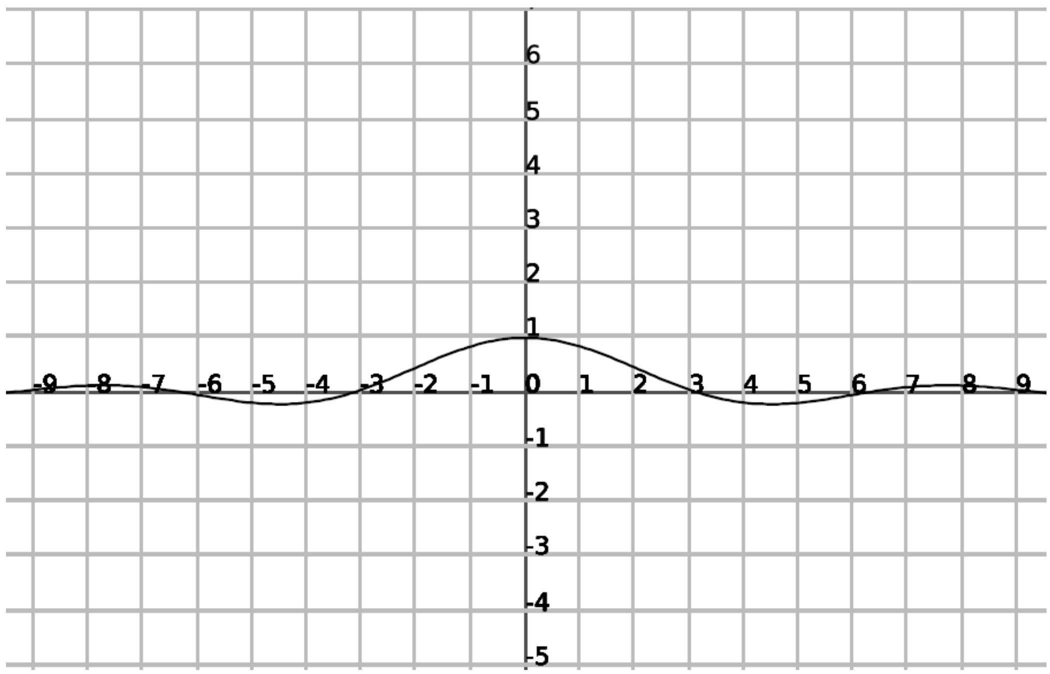
Hay que aplicar otra vez la regla del L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)}{2}$$

Luego, como $\frac{-sen(x)}{2}$ es una función continua el limite existe.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen(x)}{x}-1}{x}=0$$

Es decir, la función es diferenciable en todos los reales.



4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función $f(x)=x^2$. El TVM dice que $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para cierto ξ entre a y b. Muestre que el ξ del TVM en este caso es exactamente el punto medio entre a y b.

Solución:

Como $f(x)=x^2$ es continua y diferenciable en [a,b] podemos aplicar el TVM

$$f'(x)=2x$$

$$f'(\varepsilon)=2\varepsilon=\frac{b^2-a^2}{b-a}$$

$$2\varepsilon=\frac{(b-a)(b+a)}{b-a}$$

$$2\varepsilon=b+a$$

$$\varepsilon=\frac{b+a}{2}$$

5. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\frac{1-cos(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

¿Es f continua?¿Es f diferenciable?.

Solución:

Continuidad

La función es continua por algebra de funciones continuas para todo los reales menos el cero.

Ahora, analicemos el caso particular cuando x=0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x}=\frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla del L' Hopital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{1}$$

Ahora, como sen(x) es una función continua el limite anterior existe.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{1}=0=f(0)$$

Implica que la función es continua en cero y por lo tanto en todos los reales.

Diferenciabilidad

La función es diferenciable por algebra de funciones diferenciables para todo los reales menos el cero.

Ahora, analicemos el caso particular cuando x=0. Para que la función sea diferenciable en x=0 debe existir el limite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-cos(x)}{x}-0}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2}$$

Entonces, calculemos este límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2}=\frac{0}{0}$$

Debemos aplicar la regla del L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{2x}=\frac{0}{0}$$

Hay que aplicar otra vez la regla del L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)}{2}$$

Luego, como $\frac{cos(x)}{2}$ es una función continua, el límite existe.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Es decir, la función es diferenciable en todos los reales.

6. Considere la función $f:\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\frac{tg(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$
¿Es f continua?¿Es f diferenciable?.

Solución:

Continuidad

La función es continua por algebra de funciones continuas para todo los reales menos el cero.

Ahora, analicemos el caso particular cuando x=0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x}=\frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla del L' Hopital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sec^2(x)}{1}=1\neq f(0)$$

Esto implica que la función no es continua en cero.

Diferenciabilidad

La función es diferenciable por algebra de funciones diferenciables para todo los reales menos el cero, pues no es continua en x=0.

7. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\frac{sen(x)-x}{x^2} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

¿Es f continua?¿Es f diferenciable?.

Solución:

Continuidad

La función es continua por algebra de funciones continuas para todo los reales menos el cero.

Ahora, analicemos el caso particular cuando x=0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^2}=\frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla del L' Hopital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{2x}=\frac{0}{0}$$

Aplicando nuevamente la regla del L' Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)}{2}$$

Ahora, como $\frac{-sen(x)}{2}$ es una función continua, el límite anterior existe.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)}{2}=0=f(0)$$

Esto implica que la función es continua en cero y por lo tanto en todos los reales.

Diferenciabilidad

La función es diferenciable por algebra de funciones diferenciables para todo los reales menos el cero.

Ahora, analicemos el caso particular cuando x=0. Para que la función sea diferenciable en x=0 debe existir el limite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen(x)-x}{x^2}-0}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^3}$$

Entonces, calculemos este límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^3}=\frac{0}{0}$$

Debemos aplicar la regla del L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{3x^2}=\frac{0}{0}$$

Hay que aplicar otra vez la regla del L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)}{6x}$$

Aplicando nuevamente la regla del L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{6}$$

Luego, como $\frac{-\cos(x)}{6}$ es una función continua, el límite existe.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^3}=\frac{-1}{6}$$

Es decir, la función es diferenciable en todos los reales.

8.

Si $A\subseteq B$ y B es acotado superiormente ¿Es cierto que $Sup(A)\le Sup(B)$?

Solución:

$a\le M$ para todo $a\in A$, pues B es acotado superiormente. $\Rightarrow$ A es acotado superiormente.

p.d. $Sup(A)\le Sup(B)$ si $A\subseteq B$

$Sup(B)=\beta$, es cota superior de A

$Sup(A)=\alpha$, es la menor de las cotas superiores de A.

$\Rightarrow Sup(A)\le Sup(B)$

8. Si $\emptyset\neq A\subseteq B$ y B es acotado superiormente, ¿Es cierto que

$$Sup(A)\le Sup(B)?$$

9.

Si $A \subseteq B$ y A es acotado inferiormente ¿Es cierto que $Inf(A) \leq Inf(B)$?

Solución:

Diciendo que A es acotado inferiormente, no podemos asegurar B tenga cota inferior, al no tener cota inferior no podemos aplicar el Teorema de Ínfimo (Me refiero a teorema del ínfimo, porque es una consecuencia del axioma de supremo).

10. Si $A, B \subseteq \Re$, tales que $a \leq b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$. Además para cada $\varepsilon > 0$ existe a en A y b en B tales que $b - a < \varepsilon$, entonces ¿es cierto que $Sup(a) = \inf(B)$?

Solución:

$b \geq a^*$ tal que $a^* \in A$ para todo $b \in B$.

$\Rightarrow B$ es acotado inferiormente.

$\Rightarrow B$ tiene ínfimo. $\Rightarrow$ que para cada $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $b \subset B / b < \frac{\varepsilon}{2} + Inf(B)$ (1)

Ahora, $b^* \geq a$ tal que $b^* \in B$ para todo $a \in A$.

$\Rightarrow A$ es acotado superiormente.

$\Rightarrow A$ tiene Supremo. $\Rightarrow$ que para cada $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $a \in A / a > -\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + Sup(A)$ (2)

Luego, restando (1)-(2) $\Rightarrow$ que para cada $\varepsilon > 0$ existe

$a \in A, b \in B / b - a < \varepsilon + Inf(B) - Sup(A)$.

Citando enunciado "para cada $\varepsilon > 0$ existe a *en* A *y* b *en* B tales que $b - a < \varepsilon$"

$\Rightarrow Inf(B) - Sup(A) = 0$

$\therefore Inf(B) = Sup(A)$

14. Para $A, B \subseteq \Re$, no vacíos, $A + B = \{a + b / a \subset A, b \subset B\}$. ¿Es cierto que A y B son acotados superiormente si y solamente si A+B lo es? ¿Es cierto que el supremo de $Sup(A+B) = Sup(A) + Sup(B)$? Si su respuesta es negativa agregue condiciones para asegurar la igualdad.

$(\Rightarrow)$ Demostremos primero que si A y B son acotados superiormente, esto implica que A + B es acotado superiormente.

Si A es acotado superiormente existe M_1, tal que $a \leq M_1, \forall\, a \in A$.
Si B es acotado superiormente existe M_2, tal que $b \leq M_2, \forall\, b \in B$.

Luego, al sumar las dos definiciones.

A + B es acotado superiormente, pues existe $M_1 + M_2$, tal que
$a + b \leq M_1 + M_2, \forall\, b \in B \wedge a \in A$
$(\Leftarrow)$ Ahora demostremos que si A+B es acotado superiormente, entonces A y B son acotados superiormente.
Si A + B es acotado superiormente, entonces existe M, tal que $a + b \leq M, \forall\, b \in B \wedge a \in A$

Es fácil darse cuenta que $a \leq M, \forall a \subset A$ y $b \leq M, \forall b \subset B$.

De esto se concluye que A y B son acotados superiormente.

¿Es cierto que el supremo de $Sup(A+B) = Sup(A) + Sup(B)$?

Definamos lo siguiente:
$Sup(A) - \alpha$
$Sup(B) = \beta$

Por demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $a + b \in A + B / a + b > +\alpha + \beta - \varepsilon$

Definición de supremo,

- Para cada $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $a \in A / a > -\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \alpha$
- Para cada $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $b \in B / b > -\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \beta$

Luego, sumando las dos definiciones,

$\Rightarrow$ Para cada $\varepsilon > 0$ existe $a + b \in A + B / a + b > \alpha + \beta - \varepsilon$

$\Rightarrow \alpha + \beta = \sup(A+B)$
$\therefore Sup(A) + Sup(B) = Sup(A+B)$

12. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotadas. Defina $M_f = \sup\{f(x)/\ x \in [a, b]\}$, $M_g = \sup\{g(x)/\ x \in [a, b]\}$ y $M_{f+g} = \sup\{f(x) + g(x)/\ x \in [a, b]\}$. ¿Es cierto que $M_{f+g} = M_f + M_g$?.

Solución:

En general es falso que $m_{f+g} = m_f + m_g$,

$\boxed{\text{1 punto}}$

de hecho, si consideramos $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ definidas por $f(x) = x$ y $g(x) = 1 - x$.

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Se tiene que $m_f = 0 = m_g$, pero la función $f+g$ es la función constante igual a 1, por tanto $m_{f+g} = 1$, y por lo tanto en este ejemplo:

$$m_{f+g} \neq m_f + m_g$$

$\boxed{\text{3 puntos}}$

13. Un auto se detiene cinco segundos después de que el conductor aplicó los frenos; mientras estos se aplican, se registran las siguientes velocidades

Tiempo (seg)	0	0.7	1.4	2.1	2.8	3.5	4.2	5
Velocidad (Km/h)	100	82	71	60	40	26	15	0

a) Haga un cálculo alto y uno bajo de la distancia recorrida por el auto después de que se aplicaron los frenos.

b) En un esquema de velocidad contra tiempo, muestre cálculos altos y bajos, y la diferencia entre ellos.

Solo deben graficar los puntos de la tabla y luego calcular el área bajo esos puntos, ocupando la formula de suma superior e inferior.

14. Rogelio decide correr un maratón y trás él, en bicicleta, irá su amiga Guillermina para medirle la velocidad cada $15min$. Rogelio empieza con fuerza, pero después de una hora y media está tan cansado que tiene que detenerse. La información que Guillermina tomó se resume en la siguiente tabla:

Tiempo (min)	0	15	30	45	60	75	90
Velocidad (m/h)	12	11	10	10	8	7	0

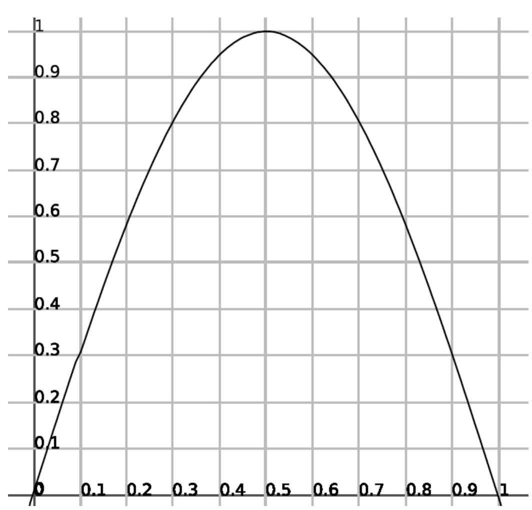
a) Si se supone que la velocidad de Rogelio es siempre decreciente, obtenga los cálculos alto y bajo de la distancia que recorrió durante la primera media hora.

b) Dé los cálculos alto y bajo de la distancia total recorrida.

c) ¿Con qué frecuencia hubiese necesitado Guillermina medir el paso de Rogelio para hallar los cálculos alto y bajo, con diferencia de no más de 0,1 millas de distancia real recorrida?.

Solo deben graficar los puntos de la tabla y luego calcular el área bajo esos puntos, ocupando la formula de suma superior e inferior.

15. Un mecanismo cíclico hace que se mueva una bolita en una línea recta. La velocidad de la bolita en el instante t viene dada por la función $v(t) = 2sen(\pi t)$. (t está medido en horas y v está medido en m/h) Aproxime la distancia recorrida por la bolita en el lapso de una hora.



Solo hay que calcular el área bajo la curva con una partición finita, como la que di en ayudantía.

16. Calcule el área del círculo de radio R del siguiente modo (el método siguiente se llama *Método de Exhaución* y fue inventado por Eudoxio en el siglo IV a.c):

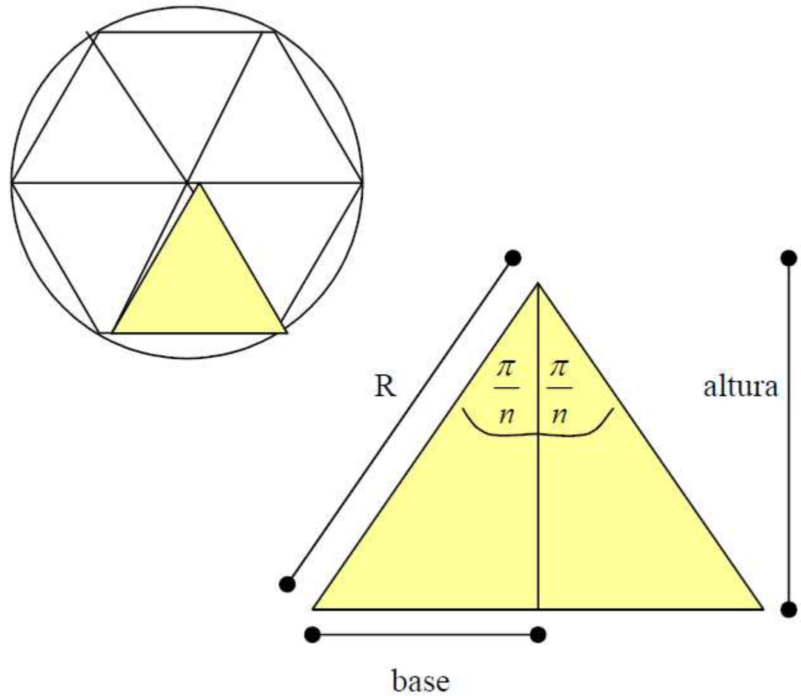
   a) Encuentre el área del polígono de n lados inscrito en la circunferencia.

   b) Encuentre el área del polígono de n lados circunscrito a la circunferencia.

   c) Pruebe que el área de la circunferencia está entre el resultado de (a) y el de (b).

   d) Pruebe que cuando n es muy grande ($n \to \infty$) el resultado de (a) y (b) *tienden* a πR^2.

a)



$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{altura}{R} \Rightarrow altura = R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{base}{R} \Rightarrow base = Rsen\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

El área del triangulo anterior es igual a la base multiplicada por la altura. (no la dividimos por dos, porque tenemos dos triángulos rectángulos iguales)

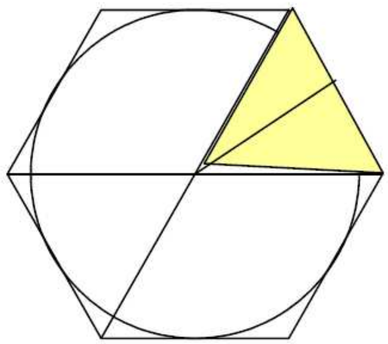
$$base \cdot altura = R^2 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

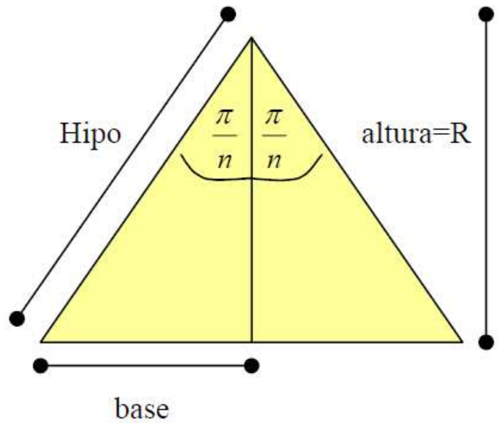
Luego, como tenemos n triángulos iguales;

$\text{Área polígono} = nR^2 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$, usando la propiedad trigonométrica $sen(2x) = 2\cos(x)sen(x)$, nos queda

$$\text{Área polígono inscrito} = \frac{nR^2}{2} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

b)





El principal cambio con respecto a la parte a), se refiere a que ahora la altura del triangulo es igual al radio de la circunferencia.

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{R}{Hipo} \Rightarrow Hipo = \frac{R}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{base}{Hipo} \Rightarrow base = R\frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} = R\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

El área del triangulo anterior es igual a la base multiplicada por la altura. (no la dividimos por dos, porque tenemos dos triángulos rectángulos iguales)

$$base \cdot altura = R^2 tag\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Luego, como tenemos n triángulos iguales;

$$\text{Área polígono circunscrito} = nR^2 tag\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

c) En este punto debemos demostrar que

$$\text{Área polígono inscrito} = \frac{nR^2}{2} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) \le \pi R^2 \le nR^2 tag\left(\frac{\pi}{n}\right) = \text{Área polígono circunscrito}$$

(Este punto háganlo ustedes)

e) Para obtener un n grande debemos hacerlo tender al infinito.

$$L\lim_{n\to\infty} \frac{nR^2}{2} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) \leq \text{área círculo} \leq L\lim_{n\to\infty} nR^2 tag\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$L\lim_{n\to\infty} \frac{nR^2}{2} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)\left(\frac{\pi}{\pi}\right) \leq \text{área círculo} \leq L\lim_{n\to\infty} nR^2 tag\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\frac{\pi}{\pi}\right)$$

$$L\lim_{n\to\infty} \pi R^2 \frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} \leq \text{área círculo} \leq L\lim_{n\to\infty} \pi R^2 \frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\pi R^2 \cdot \underbrace{L\lim_{n\to\infty} \frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}}_{1} \leq \text{área círculo} \leq \pi R^2 \cdot \underbrace{L\lim_{n\to\infty} \frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}}_{1}$$

$$\pi R^2 \leq \text{área circulo} \leq \pi R^2$$

El limite de la derecha no presenta problemas, pues convergen todos sus funciones en conjunto y por separado (entonces podemos separar los limites).

Finalmente por sándwich

$\rightarrow$ Área circulo $- nR^2$

17. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua, $[a, b] \subset D$, y sea $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n - b\}$ una partición de $[a, b]$. Muestre que no necesariamente la suma

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

representa el área de los rectángulos de están por debajo del gráfico de f.

<u>Solución:</u>

Cuando la función es decreciente la suma anterior corresponde a los rectángulos sobre la curva, es decir a la suma superior.

Otro caso, es cuando la función no es monótona, en esa ocasión puede estar sobre la curva o bajo la curva.