Segunda Guía de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Agosto, 2010

1. Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables, ¿ Es cierto que
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)?$$

2. Considera $n \in \mathbb{N}$ y define $I_n = \displaystyle\int_0^n [x]dx$. Encuentra el valor de I_n en términos de n.

3. Para cada $x \in \mathbb{R}$ define $I(x) = \displaystyle\int_0^x [t]dt$. Grafica I.

4. Si f es par y $\displaystyle\int_0^a f(t)dt = A$. Calcula $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt$, en términos de A.

5. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y P una partición de $[a, b]$. ¿Qué relación hay entre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ y $S(f, P)$?

6. Dibujar la región limitada por los gráficos de las funciones $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$ y calcular su área.

7. Encuentra una función tal que su derivada sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(2x)$. (Ayuda: La respuesta no es la función real definida para cada x por $G(x) = \sin(2x)$)

8. Considera $n \in \mathbb{Z}$, ¿Cuál es el valor de la integral $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|dx$?

9. El teorema fundamental del calculo dice que cualquier función continua tiene una función primitiva. Encuentre la primitiva F de $f(x) = |x|$, tal que $F(0) = 0$.

10. Sabemos que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una función diferenciable en (a, b). ¿Qué puede Ud. decir de $G(x) = \int_x^b f(t)dt$?

11. Sea $F(x) = \int_0^{x^2} \cos(t)dt$.¿Qué podría Ud. decir de $F'(x)$? (Ayuda: F es la composición de dos funciones, las cuales son fáciles de derivar.)

12. *[No es fácil]* Sea f continua y no negativa en $[a,b]$ tal que existe $\xi \in [a,b]$ con $f(\xi) > 0$, entonces pruebe que $\int_a^b f(x)dx > 0$.

13. Pruebe que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n+1}(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n(x)dx.$$

14. Hallar f diferenciable en $\mathbb{R}$ y un número real a tal que $\int_a^x f(t)dt = cos(x) - \frac{1}{2}$.

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de periodo T. Pruebe que $F(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt$ es una función constante.

16. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada tal que para cualquier partición P se tiene que $S(f,P) = s(f,P)$. ¿ Es f una función constante?

17. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Demuestre que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

18. Encuentre el área acotada por $y = \sqrt{x},\ \ y = x - 2$ y el eje X.

19. Muestre que $\int_1^4 \frac{1}{t}dt > 1$.

20. Sin hacer cálculos explique por que $\int_{2\pi}^{4\pi} cos(x)dx = 0$

21. Sin hacer cálculos explique por que $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)dx = \int_0^{\pi} sen(x)dx$

22. Se estima que dentro de x meses la población de cierto pueblo cambiará a una razón de $2 + 6\sqrt{x}$ personas por mes. Si la población actual es de 5000 personas. ¿Cuál será la población dentro de 9 meses?

23. Sea $F(x) = \int_0^{x^2} sen(t)dt$.¿Qué podría Ud. decir de $F'(x)$? (Ayuda: F es la composición de dos funciones, las cuales son fáciles de derivar.)

24. ¿Por qué cree Ud. que al número $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ se le llama el promedio de f en $[a,b]$?

25. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva (es decir, $f(x) > 0, \forall x \in [a,b]$). Pruebe que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una función inyectiva.

26. ¿Cuál es el error en: " $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{x}/_{-1}^{1} = -2$"?

27. Dé un sentido físico a "$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$".

28. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua, biyectiva y creciente tal que $\int_0^1 f(x)dx = a$. Calcule $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$ en función de a. (Ayuda: Piense, por ejemplo, en $f(x) = x^2$ y en $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.)

29. Si f es continua en $[a,b]$ y si $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces pruebe que existe $\xi \in [a,b]$ tal que $f(\xi) = 0$.

30. Calcule las siguientes integrales:

   a) $\int_{-2}^{3} |t|dt$

   b) $\int_0^{\pi} sen(t)dt$

   c) $\int_0^{\pi} tsen(t)dt$

   d) $\int_0^{\pi} cos(x)sen(x)dx$

   e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(z)dz$

   f) $\int_1^4 u\sqrt{u}du$

   g) $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

   h) $\int_{\pi}^{2\pi} ucos(u^2)du$

   i) $\int_0^1 x\sqrt{2-x}dx$

   j) $\int_0^{\pi} t^2sen(t)dt$