Primera Guía de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Agosto, 2010

1. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hopital?.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

2. Calcule los siguientes límites:

   a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{cos^2(x)-1}{x^2}$$

   b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x^2}$$

   c)
$$\lim_{x\to \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

   d)
$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)-x^2}{\cos(x)-1}$$

3. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   ¿Es f continua?¿Es f diferenciable? ¿Podría Ud. graficar f?.

4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función $f(x)=x^2$. El TVM dice que $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para cierto ξ entre a y b. Muestre que el ξ del TVM en este caso es exactamente el punto medio entre a y b.

5. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} \frac{1-cos(x)}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$
¿Es f continua?¿Es f diferenciable?.

6. Considere la función $f:\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} \frac{tg(x)}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$
¿Es f continua?¿Es f diferenciable?.

7. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} \frac{sen(x)-x}{x^2} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$
¿Es f continua?¿Es f diferenciable?.

8. Si $\emptyset\neq A\subseteq B$ y B es acotado superiormente, ¿Es cierto que
$$Sup(A)\leq Sup(B)?$$

9. Si $A\subseteq B$ y A es acotado inferiormente, ¿Es cierto que
$$Inf(A)\leq Inf(B)?$$

10. Si $A,B\subseteq\mathbb{R}$, tales que $a\leq b\ \ \forall a\in A,\ \ \forall b\in B$. ¿Es cierto que
$$Sup(A)\leq b\ \forall b\in B?$$
Si además para cada $\epsilon>0$ existe $a\in A$ y $b\in B$ tales que $b-a<\epsilon$, ¿es cierto que $sup(A)=inf(B)$?.

11. Para $A,B\subseteq\mathbb{R}$, defina $A+B=\{a+b/\ a\in A,\ \ b\in B\}$. ¿Es cierto que A y B son acotados superiormente si y solamente si $A+B$ lo es ? ¿Es cierto que $Sup(A+B)=Sup(A)+Sup(B)$? Si su respuesta es negativa agregue condiciones para asegurar la igualdad.

12. Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotadas. Defina $M_f=\sup\{f(x)/\ x\in[a,b]\}$, $M_g=\sup\{g(x)/\ x\in[a,b]\}$ y $M_{f+g}=\sup\{f(x)+g(x)/\ x\in[a,b]\}$. ¿Es cierto que $M_{f+g}=M_f+M_g$?.

13. Un auto se detiene cinco segundos después de que el conductor aplicó los frenos; mientras estos se aplican, se registran las siguientes velocidades

Tiempo (seg)	0	0.7	1.4	2.1	2.8	3.5	4.2	5
Velocidad (Km/h)	100	82	71	60	40	26	15	0

a) Haga un cálculo alto y uno bajo de la distancia recorrida por el auto después de que se aplicaron los frenos.

b) En un esquema de velocidad contra tiempo, muestre cálculos altos y bajos, y la diferencia entre ellos.

14. Rogelio decide correr un maratón y trás él, en bicicleta, irá su amiga Guillermina para medirle la velocidad cada $15min$. Rogelio empieza con fuerza, pero después de una hora y media está tan cansado que tiene que detenerse. La información que Guillermina tomó se resume en la siguiente tabla:

Tiempo (min)	0	15	30	45	60	75	90
Velocidad (m/h)	12	11	10	10	8	7	0

a) Si se supone que la velocidad de Rogelio es siempre decreciente, obtenga los cálculos alto y bajo de la distancia que recorrió durante la primera media hora.

b) Dé los cálculos alto y bajo de la distancia total recorrida.

c) ¿Con qué frecuencia hubiese necesitado Guillermina medir el paso de Rogelio para hallar los cálculos alto y bajo, con diferencia de no más de 0,1 millas de distancia real recorrida?.

15. Un mecanismo cíclico hace que se mueva una bolita en una línea recta. La velocidad de la bolita en el instante t viene dada por la función $v(t) = 2sen(\pi t)$. (t está medido en horas y v está medido en m/h) Aproxime la distancia recorrida por la bolita en el lapso de una hora.

16. Calcule el área del círculo de radio R del siguiente modo (el método siguiente se llama *Método de Exhaución* y fue inventado por Eudoxio en el siglo IV a.c):

a) Encuentre el área del polígono de n lados inscrito en la circunferencia.

b) Encuentre el área del polígono de n lados circunscrito a la circunferencia.

c) Pruebe que el área de la circunferencia está entre el resultado de (a) y el de (b).

d) Pruebe que cuando n es muy grande ($n \to \infty$) el resultado de (a) y (b) *tienden* a πR^2.

17. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua, $[a, b] \subset D$, y sea $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Muestre que no necesariamente la suma
$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$
representa el área de los rectángulos de están por debajo del gráfico de f.

18. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y considere la partición $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$. Denote por $s(f, P)$ a la suma inferior de f respecto a P y por $S(f, P)$ a la suma superior de f respecto a P.

    a) Muestre que $s(f, P) \leq S(f, P)$.

    b) Muestre que si Q es una partición que contiene a P (un refinamiento de P.), entonces $s(f, P) \leq s(f, Q)$.

    c) Muestre que si Q es una partición que contiene a P (un refinamiento de P.), entonces $S(f, P) \geq S(f, Q)$.

    d) Muestre que si P' es una partición cualquiera de $[a, b]$, entonces $s(f, P) \leq S(f, P')$.

    e) Muestre que
$$inf\{S(f, P)/\ P \text{ partición}\} \geq sup\{s(f, P)/\ P \text{ partición}\}$$