Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Curso algebra y Geometría 2010

Cadenas de Markov

Supongamos que tenemos dos empresas A y B, y se sabe que la fracción a $(0 < a < 1)$ de clientes de la empresa A se queda en A y el $1-a$ de clientes de A se cambia a B. Además, la fracción b $(0 < b < 1)$ de clientes de B se queda en B y el $1-b$ se va a la empresa A.

La matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}$$
se le conoce como la **m**atriz de transición. También se le llama matriz estocástica, y esta matriz tiene la característica de que sus columnas suman 1 y sus coeficientes son no negativos.

El vector inicial $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ representa las cantidades iniciales de A y B respectivamente, y $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ es el vector que muestra las cantidades de clientes en el tiempo n, $n \in \mathbb{N}$ en A y B.

Del proceso de Markov, se tiene que la probabilidad de que el sistema este en un estado particular en un cierto periodo $n+1$ depende solamente de su estado en el periodo anterior:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n + (1-b)y_n \\ y_{n+1} &= (1-a)x_n + by_n \end{aligned}$$

Escrito en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

.

Buscamos los valores propios de A:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_2| &= \begin{vmatrix} a-\lambda & 1-b \\ 1-a & b-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a+b)\lambda + (a+b-1) \\ &= \lambda^2 - f\lambda + (f-1) \end{aligned}$$

donde $f = a + b$ y $0 < f < 2$. Así, igualando a cero el polinomio característico obtenemos las raíces
$$\lambda = \frac{f \pm \sqrt{f^2 - 4(f-1)}}{2} = \frac{f \pm (f-2)}{2}$$

Los valores propios de A: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = f - 1$.
Buscamos un vector propio para λ_1,

$$\begin{pmatrix} a-1 & 1-b \\ 1-a & b-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (a-1)z_1 + \quad (1-b) \quad z_2 &= 0 \\ z_2 \quad = \quad & \frac{1-a}{1-b} z_1 \end{aligned}$$

Tomando $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1-a}{1-b}$ se tiene un vector propio de A asociado a $\lambda_1 = 1$

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-a}{1-b} \end{pmatrix}$$

Ahora para λ_2:

$$\begin{pmatrix} a-(f-1) & 1-b \\ 1-a & b-(f-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (a-f+1) \quad w_1 \quad +(1-b)w_2 &= 0 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ w_2 &= \frac{b-1}{1-b} w_1 \\ w_2 &= -w_1 \end{aligned}$$

Tomando $w_1 = 1$ y $w_2 = -1$ obtenemos un vector propio de A asociado a $\lambda_2 = f - 1$

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego, como z, w son vectores linealmente independientes (ejercicio) y $\dim(\mathbb{R}^2)$=2, el conjunto $\{z, w\}$ forman una base de $\mathbb{R}^2$. Entonces, existen ciertos escalares c, d tal que

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = cz + dw \tag{1}$$

y

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= A^n(cz + dw) \\ &= cA^n z + dA^n w \\ &= c\left(1, \frac{1-a}{1-b}\right) + d(f-1)^n(1, -1) \\ &= \left(c + d(f-1)^n, c\frac{1-a}{1-b} - d(f-1)^n\right). \end{aligned}$$

Observamos que como $|f-1|<1$ entonces cuando $n\to\infty$, $(f-1)^n\to 0$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \left(c, c\frac{1-a}{1-b}\right)$$

Notamos que necesitamos conocer el valor de c. Del sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= c+d \\ y_0 &= c\left(\frac{1-a}{1-b}\right)-d \end{aligned}$$

Resolviendo, concluimos que $c=\frac{(x_0+y_0)(1-b)}{2-(a+b)}$. De esta manera, la cantidad de clientes de A que se espera en el tiempo esta dado por

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c = \frac{(x_0+y_0)(1-b)}{2-(a+b)}.$$

OBS1: En el vector inicial, en vez de colocar los números reales de clientes de cada empresa, se puede escribir los números relativos de clientes dados en fracciones o porcentajes (en este caso, $x_0+y_0=1$).

OBS2: Un vector de estado v con la propiedad $Av=v$ se llama vector de estado estacionario. Si el vector inicial v_0 se da como un vector de probalilidad (columna suma 1) entonces v también será un vector de probabilidad.