Guía 8, Álgebra y Geometría

Programa de Bachillerato, Universidad de Chile

Junio 2010

1. Demuestre que $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$ si $det(A) \neq 0$.

2. Un **valor propio** λ de una matriz $n \times n$ A es un escalar tal que la ecuación $AX = \lambda X$ tiene una solución $X \in \mathbb{R}^n$.

   i) Demuestre que $\lambda = 0$ es valor propio de A ssi el rango de A es menor que n.

   ii) Demuestre que λ es valor propio de A ssi $A - \lambda I_n$ tiene rango menor que n. (I_n matriz identidad $n \times n$).

   iii) Demuestre que λ es valor propio de A ssi λ es raíz del polinomio $Det(xI_n - A)$.

3. Encontrar los valores propios y vectores propios de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Encontrar todos los vectores y valores propios de una matriz diagonal.

5. Suponga que A es una matriz $n \times n$ y que tiene n valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distintos con vectores correspondientes $x_i \neq 0$, tales que $Ax_i = \lambda_i x_i$. Demuestre que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$.

6. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformación lineal representado en la base canónica por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Encontrar el polinomio característico y los valores propios de T (o A). Si $L : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ es la función lineal ahora definida en $\mathbb{C}^2$ cuya matriz en la base canónica es A, cuáles son los valores propios de L ?

7. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre K. Cuál es el polinomio característico del función identidad $id : V \to V$? Cuál es el polinomio característico para la función cero sobre V?

8. Encontrar el polinomio característico de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Sea V un K- espacio vectorial de dimensión n, sea $T : V \to V$ lineal y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ los valores propios distinto de T. Definimos el subespacio asociado al valor propio λ_i como $V_{\lambda_i} = \{v \in V / T(v) = \lambda_i v\}$.

   i) Demostrar que V_{λ_i} es subespacio de V.

   ii) Demostrar que $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$, $\forall i \neq j$.

   iii) Demostrar que V_{λ_i} es invariante por T para todo i, es decir, $T(V_{\lambda_i}) \subset V_{\lambda_i}$.

   iv) Sea B_i base de V_{λ_i}, $\forall i$. Supongamos que $B = \cup_{i=1}^{m} B_i$ es base de V. Â¿Qué forma tiene la matriz de T en esta base?

10. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ se llaman semejantes si existe una matriz P no singular tal que $A = P^{-1}BP$. Demostrar que si A es semejante a B entonces A^m es semejante a B^m para todo $m \in \mathbb{N}$.

11. Demostrar que si λ es un valor propio de A, entonces λ es un valor propio de toda matriz semejante a A.

12. a) Demostrar que si λ es un valor propio de A entonces el sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)X = 0$ no tiene solución trivial.

    b) Demostrar que si λ es un valor propio de A entonces la matriz $A - \lambda I_n$ es no invertible (o singular).

    c) Demostrar que $\lambda = 0$ es valor propio de una matriz A ssi A no es invertible.

d) Sea $A \in \mathcal{M}_3(K)$, con polinomio caracteristico $P_A(x) = x - x^3$.

   a) Demostrar que A es diagonalizable.

   b) Encontrar A^{201} en función de A

13. a) Demuestre que si los subespacios propios de T asociados al valor propio λ_i, V_{λ_i} $(i = 1, \ldots, p)$, son subespacios independientes entonces la unión de las bases de cada subespacio propio forma una base del espacio $\sum_{i=1}^{p} V_{\lambda_i}$.

    b) Sean $\{\lambda_i\}_{i=1}^{p}$ valores propios distintos de T y $\{d_i\}_{i=1}^{p}$ las multiplicidades geométricas de estos valores propios, entonces pruebe que el número máximo de vectores propios linealmente independientes de T es $\sum_{i=1}^{p} d_i$. Además, si $\{m_i\}_{i=1}^{p}$ son las multiplicidades algebraicas de $\{\lambda_i\}_{i=1}^{p}$ respectivamente, pruebe que

$$p \leq \sum_{i=1}^{p} d_i \leq \sum_{i=1}^{p} m_i \leq n.$$

14. Encontrar los valores propios y los subespacios propios del endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que en la base canónica tiene asociada la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analícese si T es diagonalizable.

15. Sea A matriz real, dependiente del parámetro α:

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha+4 & 1-\alpha & -2\alpha-\alpha^2 \\ 0 & 4-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha^2 \end{pmatrix}$$

 i) Obtener los valores de α para los que A es diagonalizable por semejanza.
 ii) Diagonalizar A para $\alpha = 1$ y para $\alpha = 2$.

16. Demostrar que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

siempre es diagonalizable si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

17. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Demostrar que la matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable.

18. Verificar que el polinomio característico de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

es $x + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

19. Sea $T : V \to V$ lineal con V espacio vectorial de dimensión n. Demostrar que si T tiene n valores propios distintos entonces T es diagonalizable.

20. Demuestre que si existe una base del espacio vectorial V formado por vectores propios de T entonces T es diagonalizable.

21. Encontrar una matriz no singular P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

22. Considere la matriz compleja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1+i \\ -i & 1 & 0 & 1-i \\ 0 & -i & i & 1 \\ 1+i & -1+i & 0 & 2i \end{pmatrix}.$$

Pruebe que A es diagonalizable. Encuentre matriz diagonal D y matriz no singular P tal que $D = P^{-1}AP$.