

Guía 7, Álgebra y Geometría
Programa de Bachillerato, Universidad de Chile
Junio 2010

Espacio Cuociente.

1. Sea $V = \mathbb{R}^3$. Encontrar en cada caso una base de V/W .
 - a) $W = \mathbb{R}^3$.
 - b) $W = \{(0, 0, 0)\}$.
 - c) $W = [(0, 1, 0)]$.
 - d) $W = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$.
 - e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + 2y + z = 0\}$.
2. Sea $V = \mathbb{R}^n$, $S = \{(x, y, y, x + y) / x, y \in \mathbb{R}\}$
 - a) Calcule $\dim_{\mathbb{R}} V$.
 - b) Encuentre una base de V que contenga una base de S .
 - c) Encuentre una base de V/S .
Sea $T = \{(0, x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}$ otro subespacio de V
 - d) Encuentre una base de $S \cap T$ y una base de $S + T$.
 - e) encuentre una base de $(S + T)/S$ y una base de $T/(S \cap T)$.
3. Sea X un conjunto no vacío y $a \in X$ fijo. Consideremos el espacio V de las funciones $f : X \rightarrow K$ donde K es cuerpo. Sea $W = \{f \in V / f(a) = 0\}$.
 - i) Demostrar que W es un subespacio de V .
 - ii) Demostrar que $V/W \cong K$.
4. Sea V un espacio vectorial sobre K y sean W_1 y W_2 subespacios suplementarios de V entonces
$$W_2 \cong V/W_1, \quad W_1 \cong V/W_2.$$
5. Si W_1 y W_2 son subespacios suplementarios de W_3 , entonces $W_1 \cong W_2$.
6. Considere $\mathcal{R}[x]$ y sea $W = \{p(x) \in \mathcal{R}[x] / p(x) = (x^2 + 1)q(x), q(x) \in \mathcal{R}[x]\}$. A qué es isomorfo $\mathcal{R}[x]/W$? Es cierto que $\mathcal{R}[x]/W$ es isomorfo a $\mathcal{R}[x]/U$? Donde $U = \{p(x) \in \mathcal{R}[x] / p(x) = (x^2 + x + 1)q(x), q(x) \in \mathcal{R}[x]\}$.

Determinantes.

7. Sea A una matriz 2×2 sobre $\mathbb{R}$. Demostrar que A es invertible ssi $\text{Det}(A) \neq 0$.
8. Demuestre que $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ si $\det(A) \neq 0$.
9. Una matriz A $n \times n$ sobre un cuerpo K se dice antisimétrica si $A^t = -A$. Si A es una matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, calcule $\text{Det}(A)$.
10. Utilizando solo operaciones elementales por filas o columnas verifique que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

11. Sea $A = (A^1, A^2)$ matriz 2×2 . Los vectores columnas A^1 y A^2 son linealmente dependientes ssi el determinante es igual a cero. Generalizar para el caso n .
12. Sean $A^1, \dots, A^n$ son vectores columna de $\mathbb{R}^n$ tales que $\text{Det}(A^1, \dots, A^n) \neq 0$ y sea B es un vector columna. Entonces existen números $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que

$$\lambda_1 A^1 + \dots + \lambda_n A^n = B.$$

Estos números están determinados de manera única por B .

13. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$