Pauta Control 8 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Miércoles 19 de Mayo, 2010

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Sea $f : [1, \infty) \longrightarrow [2, \infty)$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 3$. ¿Es f una función invertible?. De ser f una función invertible, encuentre f^{-1}.

   Solución:

   Sea $y = x^2 - 2x + 3$ entonces notamos que

   $$y = x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow y - 2 = (x - 1)^2$$

   Luego f es una parábola concava hacia arriba de vértice el punto $(1, 2)$. Como $Dom(f) = [1, \infty)$, se tiene que f es inyectiva y como $Im(f) = [2, \infty)$, se tiene que f es epiyectiva. Por tanto f es biyectiva, lo que implica que f es invertible.
   Sea $g : [2, \infty) \longrightarrow [1, \infty)$ definida por $g(x) = \sqrt{x - 2} + 1$ entonces vemos que si $x \in [1, \infty)$

   $$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2 - 2x + 3) \\ &= \sqrt{x^2 - 2x + 3 - 2} + 1 \\ &= \sqrt{(x-1)^2} + 1 \\ &= x - 1 + 1 \\ &= x \end{aligned}$$

   y si $x \in [2, \infty)$

   $$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x-2} + 1) \\ &= (\sqrt{x-2} + 1)^2 - 2(\sqrt{x-2} + 1) + 3 \\ &= (\sqrt{x-2})^2 + 2\sqrt{x-2} + 1 - 2\sqrt{x-2} - 2 + 3 \\ &= x - 2 + 2 \\ &= x \end{aligned}$$

   Por tanto $f^{-1} = g$.

2. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = \begin{cases} \frac{3x-5}{x-2} & \text{si } x > 2 \\ 2x & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$.

   Determine para cada $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x)$.

   <u>Solución:</u>

   Sea $x \in \mathbb{R}$ entonces $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|x|)$.
   Si $|x| > 2$ entonces se tiene que $g(|x|) = \frac{3|x|-5}{|x|-2}$.
   Si $|x| \leq 2$ entonces $g(|x|) = 2|x|$.