Tercer Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Agosto, 2007

Tiempo:20 minutos.
Nombre:

Resuelva solo un problema entre los siguientes.

1. ¿Cuántas raíces reales tiene el polinomio $p(x) = 4x^3 + 6x^2 - 9x + 14$?

   Solución:

   Notamos que $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = 4x^3 + 6x^2 - 9x + 14$ es una función diferenciable, por tanto continua.

   Notamos que $p(-3) = 4(-27) + 6(9) - 9(-3) + 14 = -108 + 95 = -13$

   Además

   $$p'(x) = 12x^2 + 12x - 9 = 12\left(x^2 + x - \frac{3}{4}\right) = 12\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - 1\right)$$

   $$p'(x) = 12\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

   Si $x < \frac{-3}{2}$ implica que $p'(x) > 0$, lo cual implica que p es creciente en $\left(-\infty, \frac{-3}{2}\right)$

   Si $\frac{-3}{2} < x < \frac{1}{2}$ implica que $p'(x) < 0$, lo cual implica que p es decreciente en $\left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

   Luego en $\frac{-3}{2}$ tenemos un máximo local.

   Si $\frac{1}{2} < x$ implica que $p'(x) > 0$, lo cual implica que p es creciente en $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

   Luego en $\frac{1}{2}$ hay un mínimo local.

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Notamos que

$$p\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{55}{2} > 0$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{2} > 0$$

Entonces la función es creciente antes de $-1,5$ y como $f(-3) < 0$, se tiene que antes de $-1,5$ hay un cero de la función.

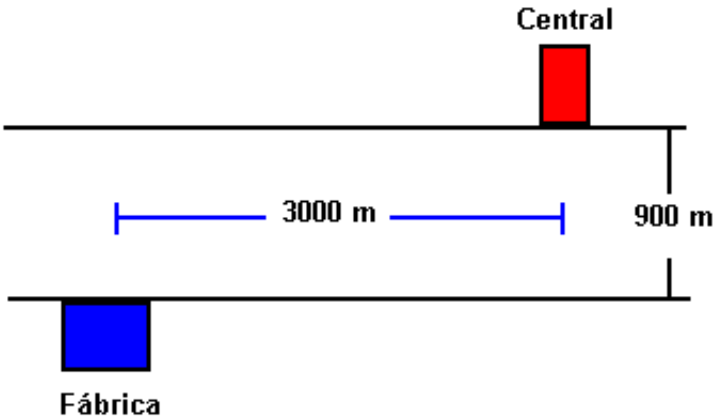
$\boxed{\text{2 puntos}}$

Después de $-1,5$ el valor más pequeño que toma es $f(0,5) > 0$, luego después de $-1,5$ no hay ningún cero.

Luego el polinomio tiene una única raíz real y está entre -3 y $-1,5$.

$\boxed{\text{2 puntos}}$

2. Se requiere tender un cable desde una central eléctrica situada a al orilla de un río de 900 m de ancho hasta una fábrica que dista 3000 m río abajo en la otra orilla. El costo de tender el cable bajo el agua es de $US\$5$ por metro y el costo sobre la tierra es de $US\$4$ por metro. ¿Cuál es la ruta más económica para tender el cable?



Solución:

Sea x la distancia de la central al punto donde el cable entra al mar (medido en metros). Notar que $x \in [0, 3000]$. Entonces el valor del cable es:

$$V(x) = 4x + 5\sqrt{(3000 - x)^2 + 900^2}$$

$$\boxed{\text{1 puntos}}$$

$$V'(x) = 4 - \frac{5(3000 - x)}{\sqrt{(3000 - x)^2 + 900^2}}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Entonces $V'(x) = 0$, si y solo si

$$4 = \frac{5(3000 - x)}{\sqrt{(3000 - x)^2 + 900^2}}$$

$$4\sqrt{(3000 - x)^2 + 900^2} = 5(3000 - x)$$

$$x = 3000 - 1200 = 1800$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Si $x \in [0, 1800)$, entonces $f'(x) < 0$. Luego f es decreciente en $x \in [0, 1800]$.

Si $x \in (1800, 3000]$, entonces $f'(x) > 0$. Luego f es creciente en $x \in (1800, 3000]$. Por lo tanto en $x = 1800$ la funci'ona alcanza un mínimo.

La ruta ms económica es ir por tierra, paralelo al río, durante 1800 m y luego ir bajo el mar en diagonal hacia la fábrica.

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$