Primer Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Julio, 2007

Tiempo:15 minutos.
Nombre:

Resuelva solo un problema entre los siguientes.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x|$. ¿ Es f diferenciable?

   Solución:

   Primero que nada, sabemos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$, es diferenciable en todo $\mathbb{R}$.

   Si $a > 0$, entonces $f(x) = g(x)$ en un vecindario de a, por lo tanto f es diferenciable en a.

   $\boxed{\text{1 punto}}$

   Si $a < 0$, entonces $f(x) = -g(x)$ en un vecindario de a, por lo tanto f es diferenciable en a.

   $\boxed{\text{1 punto}}$

   Si $a = 0$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0$$

   Entonces f es diferenciable en 0 y $f'(0) = 0$. Por lo tanto f es diferenciable (en todo $\mathbb{R}$).

   $\boxed{\text{4 puntos}}$

2. Sea f diferenciable en a, calcula el siguiente límite, en términos de $f'(a)$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$$

Solución:

Primero que nada, notamos que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t}$$

Por otra parte, haciendo $t=-h$ se tiene que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a)-f(a-h)}{h} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a)-f(a+t)}{-t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t} = f'(a)$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Ahora bien,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h} =$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(a)-f(a-h)}{h} = f'(a)+f'(a) = 2f'(a)$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$