1. ¿Cuántas raíces reales tiene el polinomio $p(x) = x^3 - 3x + 1$?

<u>Solución:</u>

La función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = x^3 - 3x + 1$ es diferenciable y por tanto continua.

$$p'(x) = 3(x-1)(x+1)$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \Rightarrow p'(x) > 0$, entonces p es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, \infty)$.

Si $x \in (-1, 1) \Rightarrow p'(x) < 0$, entonces p es decreceinte en $(-1, 1)$.

Por tanto en -1 hay un máximo y en 1 hay un mínimo.

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Además como

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$$

y $p(-1) = 3$ y $p(1) = -1$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

se tiene, por continuidad de p (Por Teorema de Bolzano) que:

En $(-\infty, -1)$ hay una raíz, en $(-1, 1)$ hay otra raíz y en $(1, \infty)$ hay una tercera raíz. Por lo tanto el polinomio $p(x) = x^3 - 3x + 1$ tiene tres raíces reales.

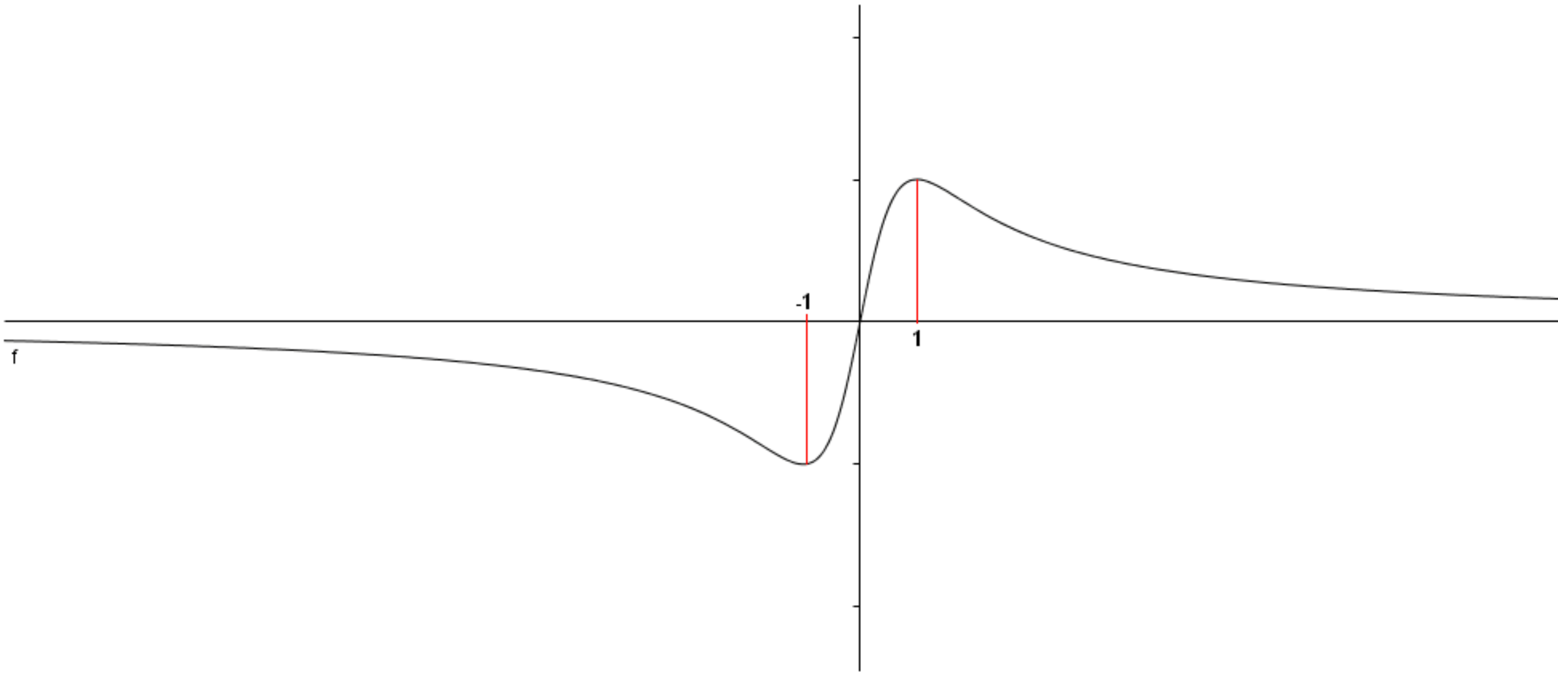
$$\boxed{\text{1 punto}}$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable y de derivada continua, tal que:

   - $f(0) = 0$
   - $f'(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
   - $f'(x) > 0,\ \forall x \in (-1, 1)$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

   Haz un bosquejo del gráfico de f.

   Solución:



Asignación de Puntajes:

- Si el estudiante es consecuente con "$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable", es decir, dibuja una curva continua "sin puntas", asignar **dos puntos.**

- Si el estudiante es consecuente con “$f(0) = 0$”, es decir, dibuja una curva pasa por el origen, asignar **un punto.**
- Si el estudiante es consecuente con “$f'(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$”, es decir, dibuja una curva decreciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, \infty)$, asignar **un punto.**
- Si el estudiante es consecuente con “$f'(x) > 0,\ \forall x \in (-1, 1)$”, es decir, dibuja una curva creciente en $(-1, 1)$, asignar **un punto.**
- Si el estudiante es consecuente con “$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$”, es decir, dibuja una curva que se aproxima asintoticamente al eje X en ambas direcciones, asignar **un punto.**