Décimo Cuarto Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Junio, 2009

Tiempo:15 minutos.

Nombre:

Resuelva solo un problema entre los siguientes.

1. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x - \alpha & \text{si } x > 1 \\ -4x + 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

   ¿Existe algún valor de α para el cual f sea diferenciable?

   <u>Solución:</u>

   Notamos primero que f es diferenciable en $a \neq 1$. Para que f sea diferenciable, es necesario y suficiente que f sea diferenciable en 1. Para que f sea diferenciable en 1, es necesario pero no suficiente, que sea continua en 1. Para que f sea continua en 1, se debe cumplir que $\alpha = 5$. Por lo tanto, en lo que sigue consideraremos la función

   $$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x > 1 \\ -4x + 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

   $$\boxed{\text{1 punto}}$$

   Sin embargo, la derivada de f en 1, no existe. De hecho, el límite

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) + 3}{h}$$

   no existe, pues si $h > 0$ se tiene que

   $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(1+h) + 3}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{2(1+h) - 5 + 3}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{2h}{h} = 2$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

En cambio, si $h < 0$ se tiene que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(1+h)+3}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{-4(1+h)+1+3}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{-4h}{h} = -4$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Por lo tanto si $\alpha \neq 5$ la función es discontinua, por lo tanto no es diferenciable. Si $\alpha = 5$ la función f no es diferenciable en 1. Por lo tanto f no es diferenciable.

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

2. Un móvil se mueve en línea recta, de tal suerte que la posición en el instante t (medido en segundos) es $x(t) = 5t + \sin(\pi t)$. (medido en metros). ¿Cuál es la velocidad instantánea del móvil, en el instante $t = 10$ [s].?

   Solución:

   Si $x(t)$ es la posición de un móvil en el instante t, entonces la velocidad es $x'(t)$. Entonces:

$$x'(t) = 5 + \pi\cos(\pi t)\ \frac{m}{s}$$

$$\boxed{\text{3 puntos}}$$

Evaluando en $t = 10\ s$, se obtiene:

$$x'(t) = 5 + \pi\cos(10\pi)\ \frac{m}{s}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

$$x'(t) = (5 + \pi)\ \frac{m}{s}$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$