Pauta Control 12 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Jueves 17 de Mayo, 2010

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} sen(x) + bx & \text{si } x \leq \frac{\pi}{4} \\ cos(x) + ax & \text{si } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

   Demuestre que f es continua en $\frac{\pi}{4}$ si y solo si $a = b$.

   Solución:

   Supongamos que f es continua en $\frac{\pi}{4}$ entonces $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x)$ existe y por tanto $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^+} f(x)$.

   $\boxed{\text{1,5 puntos}}$

   Por tanto

   $$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + b\frac{\pi}{4} = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + a\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + b\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + a\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow b = a$$

   $\boxed{\text{1,5 puntos}}$

   Reciprocamente, si $a = b$ entonces

   $$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + b\frac{\pi}{4} = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + a\frac{\pi}{4} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} f(x)$$

   $\boxed{\text{1,5 puntos}}$

   Por tanto $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, es decir f es continua en $\frac{\pi}{4}$

   $\boxed{\text{1,5 puntos}}$

2. Sea $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ continua tal que $f(a) = b$ y $f(b) = a$. Pruebe que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = c$.

<u>Solución:</u>

Notar que $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = f(x) - x$ es una función continua en $[a, b]$, puesto que es diferencia de funciones continuas en $[a, b]$.

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Ademas como $a < b$, se tiene que $F(a) = f(a) - a = b - a > 0$ y $F(b) = f(b) - b = a - b < 0$.

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Luego por teorema de Bolzano o Valor intermedio, existe $c \in (a, b)$ tal que $F(c) = 0$, es decir $f(c) = c$.

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$