Una Solución del Problema 1:

La función $f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mathrm{tg}(x) - x$ es continua, pues es el cuociente y resta de funciones continuas .

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Asignar dos por comprobar que la función es continua.

$$f(\pi) = \mathrm{tg}(\pi) - \pi = -\pi < 0$$

Además como

$$4,5 = \frac{9}{2} < \frac{3\pi}{2}$$

entonces podemos evaluar f en $4,5$ y por la ayuda se tiene que:

$$f(4,5) = \mathrm{tg}(4,5) - 4,5 > 0$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Asignar dos puntos por comprobar las hipotesis del T. de Bolzano.

Por teorema de Bolzano se tiene que existe $\xi \in (\pi; 4,5) \subseteq \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ tal que $f(\xi) = 0$, es decir, existe $\xi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ tal que $\mathrm{tg}(\xi) = \xi$.

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Asignar dos puntos por concluir correctamente.

Una Solución del Problema 2:

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ es continua, pues es una función polinomial.

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Asignar dos puntos por comprobar que la función es continua.

$$p(0) = 1 > 0$$

$$p(-1) = -2 < 0$$

Luego por el T. de Bolzano existe una raíz de p entre -1 y 0.

$$p\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{8} + \frac{1}{2} - 2 + 1 < 0$$

Luego por el T. de Bolzano existe una raíz de p entre $-1/2$ y 0.

$$p\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{-1}{64} + \frac{1}{8} - 1 + 1 > 0$$

Luego por el T. de Bolzano existe una raíz de p entre $-1/2$ y $-1/4$.

Entonces en el intervalo $\left[\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}\right]$, que tiene largo $1/4$, existe una raíz de p.

$$\boxed{\text{4 puntos}}$$

Asignar dos puntos por invocar a Bolzano y dos puntos por encontrar el intervalo correctamente.