

# Décimo Tercer Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Junio, 2009

Tiempo: 15 minutos.

**Nombre:**

**Elige un problema entre 1) y 2)**

1. Considera la función continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} 2x - \alpha & \text{si } x > 1 \\ -4x + 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$   
¿Cuál es el valor de  $\alpha$ ?

Solución:

Como  $f$  es continua en 1, es decir

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

3 puntos

Y como  $f(1) = -3$ , se tiene que

$$2 - \alpha = -3$$

luego  $\alpha = 5$ .

3 puntos

2. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(x) \neq \pi$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  y  $f(0) = \sqrt{2}$ .  
Muestre que  $f(x) < \pi$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Solución:

Si existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $f(\alpha) > \pi$ , entonces tal  $\alpha \neq 0$ , pues

$$f(0) = \sqrt{2} < \pi.$$

2 puntos

Por lo tanto, tenemos que

$$\sqrt{2} = f(0) < \pi < f(\alpha)$$

2 puntos

Por teorema del valor intermedio (o por T. de Bolzano), existe  $\gamma$  entre 0 y  $\alpha$  tal que  $f(\gamma) = \pi$ , lo que contradice una de las hipótesis, a saber que  $f(x) \neq \pi, \forall x \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  se tiene que  $f(x) < 0$ .

2 puntos