Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Mayo, 2009

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija un problema entre los siguientes.

1. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y g está definida en un vecindario de L, ¿es cierto que

   $$\lim_{x \to a} g(f(x)) = L?$$

   Solución:

   Es falso, de hecho basta considerar f como la identidad y $a = 2$ para obtener que:

   $$\lim_{x \to a} f(x) = 2 = L$$

   y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$, para mostrar que

   $$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{x \to 2} x^2 = 4 \neq 2 = L$$

   $$\boxed{\text{6 puntos}}$$

   Nota 1: Si un estudiante no da contraejemplo explícito, pero indica por qué puede fallar, asignar 3 puntos como puntaje máximo.

   Nota 2: Un pregunta mucho más interesante es la siguiente:

   Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y g está definida en un vecindario de L, ¿es cierto que

   $$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(L)?$$

   En este caso también es falso, de hecho si f es la identidad y $a = 2$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$ si $x \neq 2$ y $g(2) = 0$, entonces

   $$\lim_{x \to 2} g(f(x)) = 4 \neq g(2)$$

2. Calcula el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}$$

<u>Solución:</u>

Como $x \to \infty$ podemos considerar $x > 0$.

$$\boxed{\text{0,5 puntos}}$$

Por otra parte, para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Es importante decir, por qué al multiplicar por $1/x$ no cambia el signo de la desigualdad.

multiplicando por $\frac{1}{x} > 0$ se tiene que:

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

y como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\boxed{\text{1,5 puntos}}$$

Por el Lema del sandwich se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$