Octavo Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Otoño, 2007

Tiempo: 35 minutos.

Nombre:

Elija solo un problema entre 1. **y** 2.

1. Sea $f : \mathbb{R}/\{-1/2\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{4-7x}{2x+1}.$$

Grafica f mostrando asíntotas e intersección con los ejes. Explica tus procedimientos.

Solución:

$$f(x) = \frac{4-7x}{2x+1} = \frac{-7}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Por lo tanto el gráfico es el mismo que el de la función, definida en $\mathbb{R}*$ por $g(x) = \frac{1/4}{x}$, pero reflejado respecto al eje X y trasladado según el vector $(-1/2, -7/2)$.

Por lo tanto las asíntotas son $x = -1/2$ y $y = -7/2$.

La intesección con los ejes son $(0, 4)$ y $(4/7, 0)$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

El gráfico es:

Acá va el gráfico

$\boxed{\text{2 puntos}}$

2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 16 & \text{si } x \leq 5 \\ 24 - 3x & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

y $g(x) = |2x - 1|$. Encuentra para cada $x \in \mathbb{R}$ el valor de $f \circ g(x)$.

Solución:

$$g \circ f(x) = \begin{cases} g(x)^2 - 16 & \text{si } g(x) \leq 5 \\ 24 - 3g(x) & \text{si } g(x) > 5 \end{cases}$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Basta conocer para cuales valores de x se tieen que $g(x) \leq 5$

Es decir, necesitamos conocer x tales que

$$|2x - 1| \leq 5$$

Caso 1: Si $x \leq 1/2$ La inecuación resulta:

$$1 - 2x \leq 5$$
$$x \geq -2$$
$$S_1 = (-2, 1/2]$$

Caso 2: Si $x > 1/2$ La inecuación resulta:

$$2x - 1 \leq 5$$
$$x \leq 3$$
$$S_2 = (1/2, 3]$$

Luego $g(x) \leq 5$ si y solo si $x \in [-2, 3]$,

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

luego:

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (2x-1)^2 - 16 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ 24 - 3|2x-1| & \text{si } x > 3 \\ 24 - 3|2x-1| & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

o lo que es lo mismo:

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (2x-1)^2 - 16 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ 24 - 3(2x-1) & \text{si } x > 3 \\ 24 - 3(1-2x) & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

3. Grafica la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = sen(2x) - cos(2x)$. Explica tus procedimientos.

Solución:

Buscamos A y b tales que $f(x) = Asen(2x - b)$.

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Si tales constantes existen, entonces

$$sen(2x) - cos(2x) = Asen(2x)cos(b) - Acos(2x)sen(b)$$

Por lo tanto

$$Acos(b) = 1$$

$$Asen(b) = 1$$

Por lo tanto

$$tan(b) = \frac{Asen(b)}{Acos(b)} = 1$$

Un candidato a b es $\frac{\pi}{4}$.

$\boxed{\text{1,5 puntos}}$

Reemplazando b en $Asen(b) = 1$, se obtiene

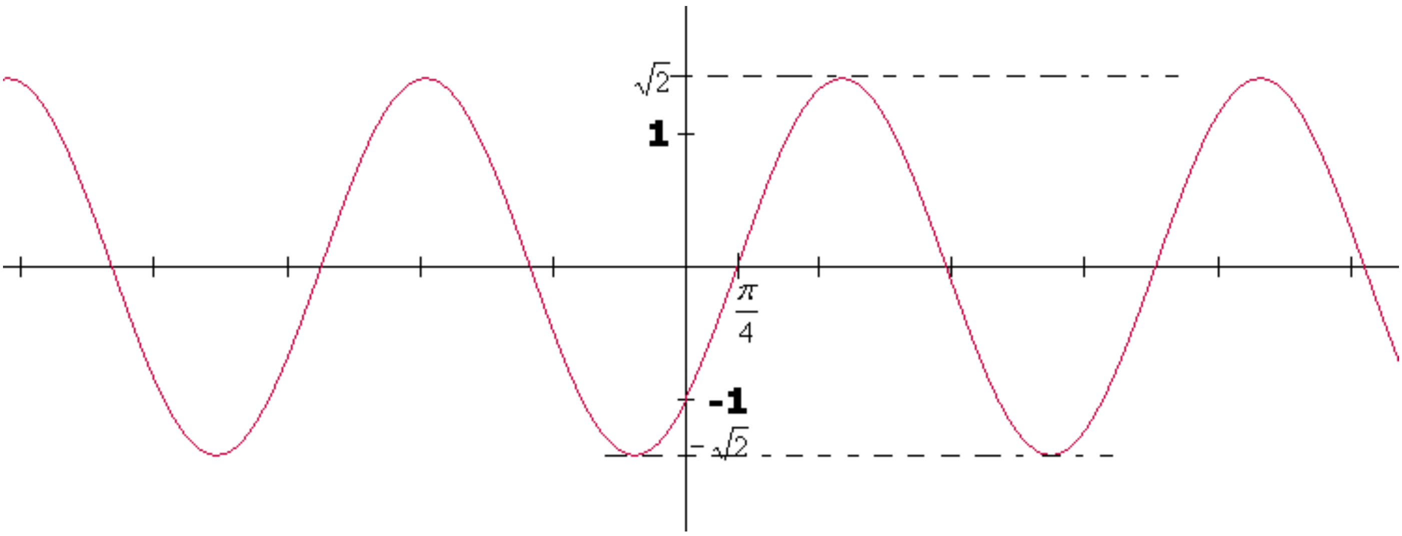
$$A = \sqrt{2}$$

$\boxed{\text{1,5 puntos}}$

De hecho

$$f(x) = \sqrt{2}sen(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}sen(2x)\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}cos(2x)\frac{\sqrt{2}}{2} = sen(2x) - cos(2x)$$

Por lo tanto el gráfico es:



$\boxed{\text{2 puntos}}$