

Octavo Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Mayo, 2009

Tiempo: 20 minutos.

Nombre:

Resuelva solo un problema entre los siguientes.

1. Considera la función $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2x+1}{3x-3}$.
Decide si f es inyectiva y si f es epiyectiva.

Solución:

Notemos primero que

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x-3} = \frac{2x-2+3}{3x-3} = \frac{2(x-1)+3}{3(x-1)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{x-1}$$

Consideremos x y x' números reales y ambos distintos de 1, y supongamos que $f(x) = f(x')$, entonces

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{x-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{x'-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x'-1}$$

$$x'-1 = x-1$$

$$x' = x$$

Luego, f es inyectiva.

3 puntos

Como $\frac{1}{x-1}$ es distinto de cero para cualquier valor de $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, se tiene que $\frac{2}{3} + \frac{1}{x-1}$ es distinto de $\frac{2}{3}$ para cualquier valor de $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, por lo tanto f no es epiyectiva, pues $\frac{2}{3} \notin \text{Im}(f)$.

3 puntos

2. En un triángulo equilátero de lado 3cm se inscribe un rectángulo de tal manera que uno de sus lados está totalmente contenido en un lado del triángulo. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima así construido?

Solución:

Denotemos los vértices del triángulo como A, B y C y como D, E, F y G los del rectángulo, la intersección de la altura que pasa por C con el lado $\overline{AB}$ la denotaremos por J y K denotará la intersección de $\overline{FG}$ con $\overline{CJ}$, como muestra la figura 1.

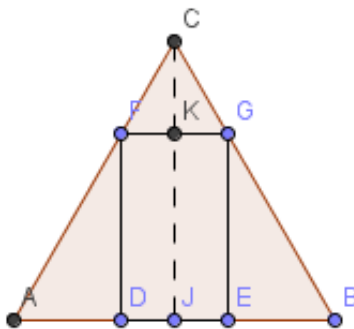


Figura 1: Rectángulo inscrito en triángulo equilátero.

Notemos que por el teorema de Pitágoras podemos decir que la altura $\overline{CJ}$, mide

$$\sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

1 punto

Notamos que los triángulos $\triangle CKG$ y $\triangle CJB$ son semejantes. Si denotamos por y la medida de $\overline{JK}$ y por x la medida de $\overline{JE}$ se tiene que:

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} - y}{x} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}$$

o equivalentemente

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - y = \sqrt{3}x$$

es decir

$$y = \sqrt{3} \left(\frac{3}{2} - x \right)$$

2 puntos

Entonces el área del rectángulo es

$$A = 2xy = 2\sqrt{3}x \left(\frac{3}{2} - x \right)$$

1 punto

Que se puede entender como una función cuadrática en x con coeficiente líder negativo, que tiene un máximo en el punto medio de las raíces $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{3}{2}$. Es decir, el valor x que produce el área máxima es $x = \frac{3}{4}$, y por lo tanto el y que produce el área máxima es

$$y = \sqrt{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

1 punto

Por lo tanto el rectángulo de área máxima inscrito en el triángulo equilátero de lado 3 cm tiene lados que miden $\frac{3}{2} \text{ cm}$ y $\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ cm}$.

1 punto