Sexto Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Mayo, 2008.

Tiempo: 20 minutos.

*Nombre:*____

Elije sólo un problema.

1. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|$ y sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, si $x \geq -2$ y $f(x) = 2x + 2$, si $x < -2$.
   Grafique la función $g \circ f$ y determine si es una función inyectiva.

   Solución 1:

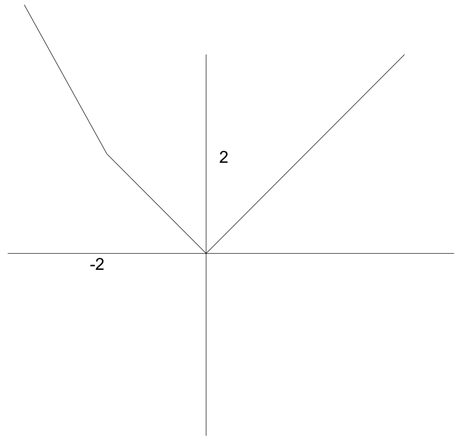
   Primero que nada notamos que $(g \circ f)(x) = (g(f(x))) = |f(x)|$.

   $\boxed{\text{1 puntos}}$

   Entonces $(g \circ f)(x) = f(x)$, si $f(x) \geq 0$ y $(g \circ f)(x) = -f(x)$, si $f(x) < 0$.
   Por tanto se tiene que:
   Si $x \in (-\infty, -2)$ entonces $(g \circ f)(x) = -2x - 2$.
   Si $x \in [-2, 0)$ entonces $(g \circ f)(x) = -x$.
   Si $x \in [0, \infty)$ entonces $(g \circ f)(x) = x$.

   $\boxed{\text{1 puntos}}$

   Luego la grafica de $(g \circ f)$ es



$\boxed{\text{2 puntos}}$

Notar que para $x = 1$ se tiene que $(g \circ f)(1) = 1$ y para $x = -1$ se tiene que $(g \circ f)(-1) = 1$.

$\boxed{\text{1 puntos}}$

Entonces como $1 \neq -1$ y $(g \circ f)(1) = (g \circ f)(-1)$ se tiene que $(g \circ f)$ no es inyectiva.

$\boxed{\text{1 puntos}}$

2. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área maxima que se puede construir con un vertices en el origen del plano cartesiano, en el eje x positivo, en el eje y positivo y sobre la recta $2x + y - 15 = 0$.

Solución 2:

Primero que nada notamos que las cordenadas de los vértices del rectángulo son $(0,0),(x,0),(0,y)$ y (x,y) con $x>0$, $y>0$ y (x,y) en la recta $2x+y-15=0$.

$\boxed{\text{1 puntos}}$

Luego las dimensiones de los lados del rectangulo son x e y y su área es xy.
Si escribimos y en función x entonces el área del rectangulo es

$$A(x)=x(-2x+15)=-2x^2+15x$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Entonces $A(x)$ es una parábola concava hacia abajo, por tanto el vértice representa el valor de x en donde $A(x)$ alcanza el máximo.

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Las cordenadas del vértice de la parabola $A(x)$ son $(\frac{15}{4},\frac{15^2}{8})$.
Por tanto las dimensiones del rectángulo de área maxima son $x=\frac{15}{4}$ e $y=\frac{15^2}{8}$.

$\boxed{\text{1 puntos}}$