Noveno Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Mayo, 2009

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

1. Encuentra todas las raíces reales del polinomio $p(x) = 3x^3 + 5x^2 - 5x + 1$.

   Solución:

   Las raíces racionales de $p(x)$ corresponden a un subconjunto, posiblemente vacío, de

   $$\{1, -1, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\}$$

   Evaluando se tiene que $p(1/3) = 0$.

   $$\boxed{\text{2 puntos}}$$

   Por lo tanto $3x - 1$ divide a $p(x)$. Haciendo la división de $p(x)$ en $3x - 1$ se tiene que:

   $$p(x) = (3x-1)(x^2+2x-1)$$

   $$\boxed{\text{2 puntos}}$$

   $$= (3x-1)((x+1)^2-2) = (3x-1)((x+1)-\sqrt{2})((x+1)+\sqrt{2}) =$$
   $$= (3x-1)(x-(-1-\sqrt{2}))(x-(-1+\sqrt{2}))$$

   Entonces las raíces reales del polinomio $p(x)$ son:

   $$\frac{1}{3},\ -1+\sqrt{2},\ -1-\sqrt{2}$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

2. Muestra un polinomio p de grado 5, tal que $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{3}$ y -1 sean sus únicas raíces reales.

<u>Solución:</u>

El polinomio p tiene a $(x-(1+\sqrt{2}))$, a $(x-(1-\sqrt{3}))$ y a $(x+1)$ como factores, es decir,

$$p(x) = (x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{3}))(x+1)q(x)$$

donde $q(x)$ es un polinomio de grado 2.

$\boxed{\text{3 puntos}}$

Como $q(x)$ no debe tener raíces reales diferentes a las ya dadas, entonces $q(x)$ puede ser un polinomio sin raíces reales, por ejemplo $q(x) = x^2+1$ o uno con raíces como las anteriores, por ejemplo, $q(x)$ puede ser $(x+1)^2$. Por lo tanto $p(x)$ puede ser por ejemplo

$$p(x) = (x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{3}))(x+1)^3,$$

o por ejemplo puede ser

$$p(x) = (x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{3}))(x+1)(x^2+1)$$

$\boxed{\text{3 puntos}}$

Es importante notar que existen infinitas opciones para $p(x)$.