Supremos e Ínfimos

Proposición 1: Si s es cota superior de A y además s pertenece a A , implica que s es Máximo y Supremo de A .

Proposición 2: Si s es cota inferior de A y además s pertenece a A , implica que s es Ínfimo y Mínimo de A .

a) Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(n) = \frac{2n+1}{3n+2}$. En caso que exista, conjeture el valor del $\text{Inf}(\text{Im}(f))$ y $\text{Sup}(\text{Im}(f))$, y demuestre que tu conjetura es correcta.

Solución:

Encontraremos el $\text{Inf}(\text{Im}(f))$:

Lo primero que debemos analizar son los elementos del conjunto $\text{Im}(f)$, (para tener una idea del comportamiento de la función).

$$f(1) = \frac{3}{5} < f(2) = \frac{5}{8} < f(3) = \frac{7}{11} < f(4) = \frac{9}{14} < \dots < f(n) = \frac{2n+1}{3n+2} < f(n+1) = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+2}$$

Notemos que si $n \geq 1$ se tiene que $f(n) \leq f(n+1)$, por lo tanto $f(1) \leq f(n)$, $\forall n \geq 1$.

Ahora bien, $f(1) = \frac{3}{5}$. Entonces necesitamos demostrar que $\frac{3}{5} \leq \frac{2n+1}{3n+2}$. (3)

Partamos con que $0 \leq n-1 \forall n \geq 1$.¹

$$0 \leq n-1$$

$$0 \leq 10n-9n+5-6$$

$$9n+6 \leq 10n+5$$

$$3(3n+2) \leq 5(2n+1)$$

$$\frac{3}{5} \leq \frac{2n+1}{3n+2}$$

¹ Desigualdad trivial, proveniente de la máxima simplificación de la ecuación 3.

Ignacio Domingo Trujillo Silva
itrujill@ing.uchile.cl

Por tanto, $\frac{3}{5} \leq f(n) \forall n \in \mathbb{N}$, esto implica que $\frac{3}{5}$ es cota inferior de la $\text{Im}(f)$ y como

$\frac{3}{5} \in \text{Im}(f)$ se tiene que el $\text{Inf}(\text{Im}(f)) = \frac{3}{5}$.²

Ahora, encontraremos el $\text{Sup}(\text{Im}(f))$ ³:

El ejercicio que se expone a continuación no utiliza la **preposición 1**, sino que recurre a la demostración por ε . Esta demostración se ocupa cuando se escoge un n lo suficientemente grande que nos asegura la convergencia a nuestro supremo o ínfimo.

Definición de Supremo: Para cada $\varepsilon > 0$ existe $a \in A / a > \text{Suf}(A) - \varepsilon$

Definición de Ínfimo: Para cada $\varepsilon > 0$ existe $a \in A / a < \text{Inf}(A) + \varepsilon$

Para cada $\varepsilon > 0$ existe $f(n) \in \text{Im}(f) / f(n) > \text{Sup}(\text{Im}(f)) - \varepsilon$

Notemos que $\frac{2}{3}$ es cota superior y además un posible supremo⁴, entonces demostremos que

$\frac{2}{3}$ es supremo.

$$\frac{2n+1}{3n+2} > \frac{2}{3} - \varepsilon$$

² Preposición 1.

³ Se desea probar que cierto número es un supremo o ínfimo, se debe escoger entre dos tipos de demostraciones la que ocupa la **Preposición 1**, y la que recurre al épsilon. Cada ejercicio tiene solo una manera de resolverse, por ello se debe tener extremo cuidado al elegir el tipo de demostración. El secreto está en analizar si el supremo o ínfimo es un elemento con n finito ($f(n)$ con n finito, se ocupa preposición 1, 2), o si se trabaja con n infinito (ocupar demostración por épsilon, como se ve en el siguiente ejemplo).

⁴ ¿Por qué es un posible supremo? Como la función es creciente $f(n) \leq f(n+1)$ al hacer crecer n , los valores que dirigen la ecuación son el $2n$ en el numerador y el $3n$ en el denominador, cuando los n son

grandes se simplifican y se intuye el posible supremo, en este caso $\frac{2}{3}$.

Ignacio Domingo Trujillo Silva
itrujill@ing.uchile.cl

$$\frac{2n+1}{3n+2} > \frac{2}{3} - \varepsilon$$

$$2n+1 > \left(\frac{2}{3} - \varepsilon\right)(3n+2)$$

$$2n+1 > 2n + \frac{4}{3} - 3n\varepsilon - 2\varepsilon$$

$$3n\varepsilon > \frac{1}{3} - 2\varepsilon$$

$$n > \frac{1}{9\varepsilon} - \frac{2}{3}$$

Propiedad Arquimediana, siempre es posible encontrar un $N > R$, con
 $N \in \mathbb{N} \wedge R \in \mathbb{R}$.

Entonces existe por “Propiedad Arquimediana”, $N > \frac{1}{9\varepsilon} - \frac{2}{3}$, con $N \in \mathbb{N} \wedge \varepsilon > 0$.

$$N > \frac{1}{9\varepsilon} - \frac{2}{3}$$

$$3N\varepsilon > \frac{1}{3} - 2\varepsilon$$

$$2N+1 > 2N + \frac{4}{3} - 3N\varepsilon - 2\varepsilon$$

$$2N+1 > \left(\frac{2}{3} - \varepsilon\right)(3N+2)$$

$$\frac{2N+1}{3N+2} > \frac{2}{3} - \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(N) \in \text{Im}(f) / f(N) > \text{Sup}(\text{Im}(f)) - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \text{Sup}(\text{Im}(f)) = \frac{2}{3}$$

b) Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(n) = \frac{n}{n+1000}$. En caso que exista, conjeture el valor del $\text{Sup}(\text{Im}(f))$, y demuestre que tu conjetura es correcta.

$$f(1) = \frac{1}{1001} < f(2) = \frac{2}{1002} < f(3) = \frac{3}{1003} < \dots < f(n) = \frac{n}{n+1000} < f(n+1) = \frac{n+1}{(n+1)+1000}$$

Notemos que si $n \geq 1$ se tiene que $f(n) \leq f(n+1)$.

Ignacio Domingo Trujillo Silva
itrujill@ing.uchile.cl

Nuestro supremo tentativo es el 1, ya que la función es creciente para todo n y los valores que dirigen la ecuación son el n en el numerador y el n en el denominador, cuando los n son grandes se simplifican y se intuye el posible supremo, en este caso 1.

Aplicemos **Definición de Supremo**:

Para cada $\varepsilon > 0$ existe $f(n) \in \text{Im}(f) / f(n) > \text{Sup}(\text{Im}(f)) - \varepsilon$

Para nuestro caso particular, “para cada $\varepsilon > 0$ existe $f(n) \in \text{Im}(f) / \frac{n}{n+1000} > 1 - \varepsilon$ ”

$$\frac{n}{n+1000} > 1 - \varepsilon$$

$$n > (1 - \varepsilon)(n + 1000)$$

$$n > n + 1000 - n\varepsilon - 1000\varepsilon$$

$$n\varepsilon > 1000 - 1000\varepsilon$$

$$n > \frac{1000}{\varepsilon} - 1000$$

Entonces existe por “Propiedad Arquimediana”, $N > \frac{1000}{\varepsilon} - 1000$, con $N \in \mathbb{N} \wedge \varepsilon > 0$.

$$N > \frac{1000}{\varepsilon} - 1000$$

$$N\varepsilon > 1000 - 1000\varepsilon$$

$$N > -N\varepsilon + N + 1000 - 1000\varepsilon$$

$$N > (1 - \varepsilon)(N + 1000)$$

$$\frac{N}{N+1000} > 1 - \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(N) \in \text{Im}(f) / f(N) > \text{Sup}(\text{Im}(f)) - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \text{Sup}(\text{Im}(f)) = 1$$

Ignacio Domingo Trujillo Silva
itrujill@ing.uchile.cl

METODOLOGÍA (Supremos e Ínfimos):

Caso 1: Demostrar diciendo que si s es cota superior de A y además s pertenece a A , implica que s es Máximo y Supremo de A (Proposición 2 en el caso del ínfimo)

1. Analizar elemento de la $\text{Im}(f)$, para los primeros números naturales.
2. Encontrar un posible Supremo, con n finito. (Encontrar un posible Ínfimo, con un n finito)
3. Demostrar que es cota superior. (Demostrar que es cota inferior)
4. Aplicar **Proposición 1**. (Aplicar **Proposición 2**)

Caso 2: Demostrar usando definición por épsilon del supremo “para cada $\varepsilon > 0$ existe $a \in A / a > \text{Sup}(A) - \varepsilon$ ”. (“para cada $\varepsilon > 0$ existe $a \in A / a < \text{Inf}(A) + \varepsilon$ ”)

1. Analizar la convergencia de la función cuando la n crece.
2. Encontrar un posible Supremo, con n infinito. (Encontrar un posible Ínfimo, con un n infinito)
3. Despejar la n de la *definición de supremo*.
4. Probar que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que se cumpla la *definición de supremo*, aplicando la *propiedad arquimediana*.
5. Reemplazar la n despejado por N de la propiedad arquimediana.
6. Devolverse y formar nuevamente la *definición de Supremo*.
7. Concluir que el Supremo tentativo, es el Supremo.

Partiremos por dar una serie de ejemplos tipos (de supremos e ínfimos).

6. Si $A \subseteq B$ y B es acotado superiormente ¿Es cierto que $Sup(A) \leq Sup(B)$?

Solución:

$a \leq M$ para todo $a \in A$, pues B es acotado superiormente. $\Rightarrow$ A es acotado superiormente.

p.d. $Sup(A) \leq Sup(B)$ si $A \subseteq B$

$Sup(B) = \beta$, es cota superior de A

$Sup(A) = \alpha$, es la menor de las cotas superiores de A.

$\Rightarrow Sup(A) \leq Sup(B)$

7. Si $A \subseteq B$ y A es acotado inferiormente ¿Es cierto que $Inf(A) \leq Inf(B)$?

Solución:

Diciendo que A es acotado inferiormente, no podemos asegurar B tenga cota inferior, al no tener cota inferior no podemos aplicar el Teorema de Ínfimo (Me refiero a teorema del ínfimo, porque es una consecuencia del axioma de supremo).

8. Si $\emptyset \neq A \subseteq \mathfrak{R}$ es acotado superiormente, defina $C = \{c / c \text{ es cota superior de } A\}$ el cual es un conjunto acotado inferiormente (¿Por qué?). ¿Es cierto que $Inf(C) = Sup(A)$?

Solución:

(¿Por qué?)

Al ser C cota superior de A, $\Rightarrow \forall c \in C, a \in A$ tal que $c \geq a$.

Implica que todo $a \in A$ es cota inferior de C $\Rightarrow$ C es acotado inferiormente.

p.d. $Inf(C) = Sup(A)$

$Sup(A) = s / s \geq a \quad \forall a \in A, s \in C$, luego $s \leq c \quad \forall c \in C$ (o sea, para todo c cota superior de A)

$\Rightarrow s = Min(C)$, pues $s \in C$

$\Rightarrow s = Min(C) = inf(C) = Sup(A)$

$\Rightarrow \therefore inf(C) = Sup(A)$

9. Si $A, B \subseteq \mathfrak{R}$, tales que $a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$. ¿Es cierto que $Sup(A) \leq b \forall b \in B$?

Solución:

$b \geq a^*$ tal que $a^* \in A$ para todo $b \in B$.

$\Rightarrow B$ es acotado inferiormente.

$\Rightarrow B$ tiene ínfimo

Luego, A es acotado superiormente (pues B tiene ínfimo) $\Rightarrow A$ tiene supremo.

$Sup(A) \leq b$, para todo $b \in B$, pues todo $b \in B \geq a \in A$. Luego b es cota superior de A .

$\Rightarrow \therefore b \geq sup(A)$

10. Si $A, B \subseteq \mathfrak{R}$, tales que $a \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B$. Además para cada $\varepsilon > 0$ existe a en A y b en B tales que $b - a < \varepsilon$, entonces ¿es cierto que $Sup(A) = inf(B)$?

Solución:

$b \geq a^*$ tal que $a^* \in A$ para todo $b \in B$.

$\Rightarrow B$ es acotado inferiormente.

$\Rightarrow B$ tiene ínfimo. $\Rightarrow$ que para cada $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $b \in B / b < \frac{\varepsilon}{2} + Inf(B)$ (1)

Ahora, $b^* \geq a$ tal que $b^* \in B$ para todo $a \in A$.

$\Rightarrow A$ es acotado superiormente.

$\Rightarrow A$ tiene Supremo. $\Rightarrow$ que para cada $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $a \in A / a > -\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + Sup(A)$ (2)

Luego, restando (1)-(2) $\Rightarrow$ que para cada $\varepsilon > 0$ existe

$a \in A, b \in B / b - a < \varepsilon + Inf(B) - Sup(A)$.

Citando enunciado “para cada $\varepsilon > 0$ existe a en A y b en B tales que $b - a < \varepsilon$ ”

$\Rightarrow Inf(B) - Sup(A) = 0$

$\therefore Inf(B) = Sup(A)$

12. ¿Es cierto que todo conjunto no vacío de números racionales, acotado superiormente tiene su supremo en $\mathbb{Q}$?

13. Para $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, defina $-A = \{-a / a \in A\}$. ¿Es cierto que A es acotado superiormente si y solamente si $-A$ es acotado inferiormente? ¿Es cierto que $\text{Inf}(-A) = -\text{Sup}(A)$?

($\Rightarrow$) Por demostrar que “si A es acotado superiormente $\Rightarrow -A$ es acotado inferiormente.”

Luego, A es acotado superiormente $a \leq m, \forall a \in A$. (3)

Si multiplicamos (3) por -1, tenemos $-a \geq -m, \forall a \in A \Rightarrow -A$ es acotado inferiormente.

($\Leftarrow$) Por demostrar que “si $-A$ es acotado inferiormente $\Rightarrow A$ es acotado superiormente.”

Luego, $-A$ es acotado inferiormente $-a \geq m, \forall a \in A$ (4)

Si multiplicamos (4) por -1, tenemos $a \leq -m, \forall a \in A$ eso $\Rightarrow$ que A es acotado superiormente.

¿Es cierto que $\text{Inf}(-A) = -\text{Sup}(A)$?

Para cada $\varepsilon > 0$ existe $a \in A / a < \text{Sup}(A) - \varepsilon$ (5)

Si multiplicamos (5) por -1, tenemos “para cada $\varepsilon > 0$ existe $a \in A / -a > -\text{Sup}(A) + \varepsilon$ ”

Esa es la definición de ínfimo, luego $\text{Inf}(-A) = -\text{Sup}(A)$.

14. Para $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no vacíos, $A + B = \{a + b / a \in A, b \in B\}$. ¿Es cierto que A y B son acotados superiormente si y solamente si $A+B$ lo es? ¿Es cierto que el supremo de $\text{Sup}(A + B) = \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$? Si su respuesta es negativa agregue condiciones para asegurar la igualdad.

($\Rightarrow$) Demostremos primero que si A y B son acotados superiormente, esto implica que $A + B$ es acotado superiormente.

Si A es acotado superiormente existe M_1 , tal que $a \leq M_1, \forall a \in A$.

Si B es acotado superiormente existe M_2 , tal que $b \leq M_2, \forall b \in B$.

Luego, al sumar las dos definiciones.

$A + B$ es acotado superiormente, pues existe $M_1 + M_2$, tal que

$a + b \leq M_1 + M_2, \forall b \in B \wedge a \in A$

Ignacio Domingo Trujillo Silva
itrujill@ing.uchile.cl

($\Leftarrow$) Ahora demostremos que si $A+B$ es acotado superiormente, entonces A y B son acotados superiormente.

Si $A + B$ es acotado superiormente, entonces existe M , tal que $a + b \leq M, \forall b \in B \wedge a \in A$

Es fácil darse cuenta que $a \leq M, \forall a \in A$ y $b \leq M, \forall b \in B$.

De esto se concluye que A y B son acotados superiormente.

¿Es cierto que el supremo de $Sup(A + B) = Sup(A) + Sup(B)$?

Definamos lo siguiente:

$$Sup(A) = \alpha$$

$$Sup(B) = \beta$$

Por demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $a + b \in A + B / a + b > \alpha + \beta - \varepsilon$

Definición de supremo,

$$- \text{ Para cada } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \text{ existe } a \in A / a > -\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \alpha$$

$$- \text{ Para cada } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \text{ existe } b \in B / b > -\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \beta$$

Luego, sumando las dos definiciones,

$$\Rightarrow \text{ Para cada } \varepsilon > 0 \text{ existe } a + b \in A + B / a + b > \alpha + \beta - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \sup(A + B)$$

$$\therefore Sup(A) + Sup(B) = Sup(A + B)$$

15. Encuentre supremos e ínfimos, si existen, de $A = \left\{ \frac{n+1}{n} / n \in \mathbb{N} \right\}$

Apliquemos igualdad anterior $Sup(C + D) = Sup(C) + Sup(D)$

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \right\}, A = C + D \Rightarrow C = \left\{ 1 / n \in \mathbb{N} \right\} \wedge D = \left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$Sup(C + D) = \underbrace{Sup(C)}_1 + \underbrace{Sup(D)}_1$$

$$Sup(A) = 1 + 1 = 2$$

Aplicando igualdad lógica $Inf(C + D) = Inf(C) + Inf(D)$

Ignacio Domingo Trujillo Silva
itrujill@ing.uchile.cl

$$\text{Inf}(C + D) = \underbrace{\text{Inf}(C)}_1 + \underbrace{\text{Inf}(D)}_0$$

$$\text{Sup}(A) = 1 + 0 = 1$$

16. Sea $x \in \mathfrak{R}$, fijo. Defina $A_x = \{k \in \mathbb{Z} / k \leq x\}$ el cual es acotado superiormente (¿por qué?). Denote el supremo de A_x por $\text{Sup}(A_x) = [x]$. A ese número le llamaremos *la parte entera de x*.

$x^* \geq k$ tal que $x^* \in \mathfrak{R}$ _ fijo, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow B$ es acotado superiormente.

a) Muestre que $[x] \in \mathbb{Z}$.

b) Muestre que si $x \in \mathbb{Z}$ entonces $[x] = x$.

c) ¿Es cierto que $[x + z] = [x] + [z]$?

Escojamos $x = 3,7$ e $y = 2,4$, tendremos

$$[3,7 + 2,4] = [3,7] + [2,4]$$

$$[6,1] = 3 + 2$$

$$6 = 5 \Rightarrow \Leftarrow$$

$$\therefore [x + z] \neq [x] + [z]$$

d) Es cierto que cualquier numero entero se puede escribir de la forma $(-1)^n \left[\frac{n}{2} \right]$, para un único $n \in \mathbb{N}$?

e) ¿Es cierto que $[n + x] = n + [x]$, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ y de $x \in \mathfrak{R}$?