

Quinto Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Abril, 2008

Tiempo: 20 minutos.

Nombre:

Elija solo uno de los siguientes problemas.

1. Considera el conjunto

$$A = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n} / n \in \mathbb{N} \right\}$$

Encuentra el ínfimo o el supremo de A y demuestra que tu hallazgo es correcto.

Solución 1:

Primero que nada notamos que para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\frac{n + (-1)^n}{n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

Además como para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $-n \leq -1 \leq (-1)^n$, entonces se tiene que:

$$-1 \leq \frac{(-1)^n}{n}$$

2 puntos

Por tanto

$$\frac{n + (-1)^n}{n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \geq 1 + -1 = 0$$

2 puntos

Lo que implica que 0 es cota inferior de A . Además como $0 = \frac{1+(-1)^1}{1} \in A$ se tiene que 0 es a la vez cota inferior y elemento de A , por lo tanto 0 es el ínfimo de A .

2 puntos

Solución 2:

Primero que nada notamos que para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\frac{n + (-1)^n}{n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

Si $n \in \mathbb{N}$ y n es impar, se tiene que $\frac{(-1)^n}{n} < 0 < \frac{1}{2}$, por otro lado si n es par, se tiene que $n \geq 2$ y por tanto

$$n \geq (-1)^n \times 2,$$

por lo tanto si n es par

$$\frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{2}$$

Resumiendo: Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, ya sea par o impar, se cumple que:

$$\frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{2}$$

2 puntos

Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\frac{n + (-1)^n}{n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

2 puntos

Es decir, $3/2$ es cota superior de A . Además como $\frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{2+(-1)^2}{2} \in A$ se tiene que $3/2$ es tanto cota superior de A como elemento de A , por lo tanto $3/2$ es supremo de A .

2 puntos

2. Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x - 1| + 2$ y $g(x) = \frac{x}{2} + 4$, respectivamente. Encuentra el supremo o ínfimo del conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq f(x)\}$$

y demuestra que tu hallazgo es correcto.

Solución :

Notamos que A es el conjunto de números reales x tales que

$$|x - 1| + 2 \leq \frac{x}{2} + 4 \tag{1}$$

Caso 1: si $x < 1$.

En este caso la inecuación (1) es equivalente a

$$1 - x + 2 \leq \frac{x}{2} + 4$$

$$3 - x \leq \frac{x}{2} + 4$$

$$6 - 2x \leq x + 8$$

$$-2 \leq 3x$$

$$\frac{-2}{3} \leq x$$

Entonces en este caso el conjunto solución es $S_1 = \left[\frac{-2}{3}, 1 \right)$

2 puntos

Caso 2: si $x \geq 1$.

En este caso la inecuación (1) es equivalente a

$$x - 1 + 2 \leq \frac{x}{2} + 4$$

$$x + 1 \leq \frac{x}{2} + 4$$

$$2x + 2 \leq x + 8$$

$$x \leq 6$$

Entonces en este el conjunto solución es: $S_2 = [1, 6]$

2 puntos

Entonces

$$A = \left[\frac{-2}{3}, 6 \right]$$

1 punto

Por tanto el supremo de A es 6.

1 punto

FIN SUPREMO

Por lo tanto el ínfimo es $-2/3$

1 punto

FIN ÍNFIMO