Sexto Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Otoño, 2007

Tiempo: 20 minutos.

Nombre:

Elija solo uno de los siguientes problemas.

1. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = \frac{2n+(-1)^n}{3n-2}$. En caso que exista, conjetura el valor del supremo de $Im(f)$ y demuestre que tu conjetura es correcta.

   Solución:

   Primero que nada notamos que si $n \geq 3$ se tiene que $2n + 1 \leq 3n - 2$, por lo tanto

   $$f(n) = \frac{2n + (-1)^n}{3n - 2} \leq \frac{2n + 1}{3n - 2} \leq 1, \;\; \forall n \geq 3.$$

   $\boxed{\text{2 puntos}}$

   Ahora bien, $f(1) = 1$ y $f(2) = \frac{5}{4}$, por lo tanto

   $\boxed{\text{1 punto}}$

   $$\frac{5}{4} \geq f(n) \; \forall n \in \mathbb{N}$$

   $\boxed{\text{1 punto}}$

Por lo tanto $5/4$ es cota superior de $Im(f)$ y como $5/4 \in Im(f)$ se tiene que el supremo de $Im(f)$ es $5/4$.

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

2. Sea $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, tales que B es acotado inferiormente. Demuestre que

$$Inf(A) \geq Inf(B).$$

Muestre un ejemplo con $A \neq B$, pero $inf(A) = Inf(B)$.

Solución:

Sea $\alpha = inf(B)$, por lo tanto α es cota inferior de B es decir:

$$\alpha \leq b \ \forall b \in B$$

Como $A \subseteq B$ se tiene que en particular

$$\alpha \leq a \ \forall a \in A$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Luego α es cota inferior de A, y como $inf(A)$ es la mayor de las cotas inferiores de A se tiene que

$$\alpha \leq inf(A)$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

es decir,

$$inf(B) \leq inf(A)$$

Sea $A = [0, 1] \subseteq [0, 2] = B$, en este caso $A \neq B$ y además

$$inf(A) = inf(B) = 0$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$