Auxiliar miércoles 18 de abril de 2007

13. Sean $x, y \in \Re$. Considere el número

$$M(x,y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

Muestre que M(x,y) es el máximo entre x e y. Encuentre una expresión similar para el mínimo entre x e y.

Basta ponerse en los casos que *x<y*, y que *x>y*.

1° Caso: x < y

$x - y < 0$.

Luego, como *x - y* es menor que cero, escribimos.

$$M(x,y) = \frac{x + y - (x - y)}{2} = \frac{2y}{2} = y$$

Ahora, se cumple que dado $x < y, \Rightarrow M(x,y) = y$

2° Caso: x > y

$x - y > 0$.

Luego, como *x - y* es menor que cero, escribimos.

$$M(x,y) = \frac{x + y + (x - y)}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

Ahora, se cumple que dado $x > y, \Rightarrow M(x,y) = x$

Por tanto, se concluye que $M(x,y)$ es el máximo entre x e y.

Para escoger el mínimo solo basta $Min(x,y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$

14. a) Si $0 < r < 1$, muestre que existe $c > 0$ *tal que* $r = \frac{1}{1+c}$

Solo basta ver que como r pertenece a (0, 1), se puede escribir $\frac{1}{r} = 1 + c$ con $c>0$.

b) Muestre que si c > 0, entonces $(1+c)^n \geq 1 + nc$, para cualquier valor de $n \in \aleph$.

$$(1+c)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n)^k(1)^{n-k} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}c+\binom{n}{2}c^2+\ldots+\binom{n}{n-1}c^{n-1}+\binom{n}{n}c^n$$

$$(1+c)^n = 1+nc+\underbrace{\binom{n}{2}c^2+\ldots+\binom{n}{n-1}c^{n-1}+\binom{n}{n}c^n}_{\geq 0} \geq 1+nc$$

$$(1+c)^n \geq 1+nc$$

c) Muestre que si *0 < r < 1*, existe c>0 tal que para cualquier valor de $n \in \aleph$, se tiene que $r^n \leq \left(\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$

Si tomamos $r = \frac{1}{1+c}$ de la parte a), y lo elevamos a la n.

$r^n = \frac{1}{(1+c)^n}$, luego tomamos $(1+c)^n \geq 1+nc$

$$\frac{1}{1+nc} \geq \frac{1}{(1+c)^n} = r^n$$

$$r^n \leq \frac{1}{1+nc}$$

Por ultimo consideramos que, $nc+1 \geq nc \Rightarrow \frac{1}{nc} \geq \frac{1}{nc+1} \Rightarrow r^n \leq \frac{1}{nc}$

15. Resuelva las siguientes desigualdades.

a)
$$2x-3 < x-1 /+(-x)$$
$$x-3 < -1 /+(3)$$
$$x < 2$$

b) $x < x^2 - 12 < 4x$

Caso 1:

$$x < x^2 - 12$$
$$0 < x^2 - x - 12$$
$$0 < (x-4)(x+3)$$

Caso 2:

$$x^2 - 12 < 4x$$
$$x^2 - 4x - 12 < 0$$
$$(x-6)(x+2) < 0$$

Análisis caso 1:

$(x-4)<0 \wedge (x+3)<0$ ó que $(x-4)>0 \wedge (x+3)>0$

Caso 1.1

$(x-4)<0$ $\quad$ $(x+3)<0$

$x<4$ $\quad$ $x<-3$

$S_{1.1} =]-\infty,4[\cap]-\infty,-3[=]-\infty,-3[$

Caso 1.2

$(x-4)>0$ $\quad$ $(x+3)>0$

$x>4$ $\quad$ $x>-3$

$S_{1.2} =]4,\infty[\cap]-3,\infty[=]4,\infty[$

$S_1 = S_{1.1} \cup S_{1.2}$

Análisis caso 2:

$(x-6)<0 \wedge (x+2)>0$ ó que $(x-6)>0 \wedge (x+2)<0$

Caso 2.1

$(x-6)<0$ $\quad$ $(x+2)>0$

$x<6$ $\quad$ $x>-2$

$S_{2.1} =]-\infty,6[\cap]-2,\infty[=]-2,6[$

Caso 2.2

$(x-6)>0$ $\quad$ $(x+2)<0$

$x>6$ $\quad$ $x<-2$

$S_{2.2} =]6,\infty[\cap]-\infty,-2[= \phi$

$S_2 = S_{2.1} \cup S_{2.2} = S_{2.1}$ Por que $S_{2.2} = \phi$

Interprete si es necesario interceptar o unir S_1 y S_2 para obtener la solución final.

c) $\frac{x-1}{x^2-3x} \geq 0$

$$\frac{x-1}{x^2-3x} \geq 0$$
$$\frac{x-1}{x(x-3)} \geq 0$$

Hay que ponerse en cuatro casos cuando todos son positivos $\frac{\overbrace{x-1}^{+}}{\underbrace{x}_{+}\underbrace{(x-3)}_{+}} \geq 0$ o cuando dos

son negativos $\frac{\overbrace{x-1}^{-}}{\underbrace{x}_{+}\underbrace{(x-3)}_{-}} \geq 0$, $\frac{\overbrace{x-1}^{-}}{\underbrace{x}_{-}\underbrace{(x-3)}_{+}} \geq 0$, $\frac{\overbrace{x-1}^{+}}{\underbrace{x}_{-}\underbrace{(x-3)}_{-}} \geq 0$.

d) $|2x-3| + |4-x| < 2$

Buscar puntos críticos.

$$2x-3=0$$
$$x=\frac{3}{2}$$

$$4-x=0$$
$$x=4$$

Para $x < \frac{3}{2}$

$$-(2x-3)+(4-x) < 2$$
$$-3x < 2-4-3$$
$$3x > 5$$
$$x > \frac{3}{5}$$
$$S_1 = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[\cap \left]\frac{3}{5}, \infty\right[= \left]\frac{3}{5}, \frac{3}{2}\right[$$

Para $\frac{3}{2} \leq x \leq 4$

$$(2x-3)+(4-x) < 2$$
$$x < 2-1$$
$$x < 1$$

$S_2 = \left[\frac{3}{2}, 4\right] \cap \left]-\infty, 1\right[= \Phi$

Para $x > 4$

$(2x-3)-(4-x) < 2$
$3x - 7 < 2$
$x < 9$

$S_3 = \left]4, \infty\right[\cap \left]-\infty, 9\right[= \left]4, 9\right[$

$S_f = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

16. Sean $b, a, \delta, \varepsilon$ números positivos. Suponga que $|x-a| < \delta$ y que $|y-b| < \varepsilon$, entonces demuestre que:

a) $|x + y - (a+b)| < \delta + \varepsilon$

Basta escribir de esta forma los valores absolutos,
$-\delta < x - a < \delta$ (1)
$-\varepsilon < y - b < \varepsilon$ (2)

Sumamos (1) y (2).

$-\varepsilon - \delta < x - a + y - b < \varepsilon + \delta$
$-(\varepsilon + \delta) < x + y - (a+b) < \varepsilon + \delta$
Usando definición de valor absoluto.

$\therefore |x + y - (a+b)| < \delta + \varepsilon$

b) $|xy - ab| < \delta(b + \varepsilon) + a\varepsilon$

$-\delta < x - a < \delta$
$-\delta + a < x < \delta + a$(3)

$-\varepsilon < y - b < \varepsilon$
$-\varepsilon + b < y < \varepsilon + b$(4)

Multiplicamos (3) por (4).

$$\left(-\varepsilon+b\right)\left(-\delta+a\right)<yx<\left(\varepsilon+b\right)\left(\delta+a\right)$$
$$\delta\varepsilon+ab-\varepsilon a-\delta b<xy<\delta\varepsilon+ab+\varepsilon a+\delta b$$
$$-\left(\varepsilon a+\delta b\right)<xy-ab-\delta\varepsilon<\varepsilon a+\delta b$$ Restamos $\delta\varepsilon+ab$
$$\left|xy-ab-\delta\varepsilon\right|<\varepsilon a+\delta b$$

Aplicando desigualdad triagunlar (arreglada), $|a|-|b|\leq|a-b|$ (Demuéstrenlo)

$$|xy-ab|-|\varepsilon\delta|\leq|(xy-ab)-(\delta\varepsilon)|<\varepsilon a+\delta b$$
$$|xy-ab|-\varepsilon\delta<\varepsilon a+\delta b$$
Sumando $\delta\varepsilon$
$$|xy-ab|<\varepsilon a+\delta b+\delta\varepsilon=\delta\left(b+\varepsilon\right)+a\varepsilon$$
$$\therefore|xy-ab|<\delta\left(b+\varepsilon\right)+a\varepsilon$$

c) $\left|x^2-a^2\right|<\delta^2+2\delta a$

Tomamos desde el enunciado.

$$|x-a|<\delta$$

$$-\delta<x-a<\delta\rightarrow(1)$$

$$-\delta+2a<x+a<\delta+2a\rightarrow(2)$$

Tomamos la ecuación (1) y la multiplicamos por la (2).

$$\left(-\delta+2a\right)\left(-\delta\right)<\left(x-a\right)\left(x+a\right)<\left(\delta+2a\right)\left(\delta\right)$$
$$\delta^2-2a\delta<x^2-a^2<\delta^2+2a\delta$$
$$-\delta^2-2a\delta<\delta^2-2a\delta<x^2-a^2<\delta^2+2a\delta$$
$$-(\delta^2+2a\delta)<x^2-a^2<\delta^2+2a\delta x^2-a^2<\delta^2+2a\delta$$

$$\therefore\left|x^2-a^2\right|<\delta^2+2a\delta$$