Cuarto Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Abril, 2008.

Tiempo: 20 minutos.

*Nombre:*____

Elije sólo un problema.

1. Encuentre todos los números, $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$|x| < x^2 \tag{1}$$

Solución 1:

Primero que nada notamos que $x = 0$ no es solución de la inecuación, por tanto en lo que sigue consideraremos $x \neq 0$. Además como $x^2 = |x^2| = |x|^2$ se tiene que la inecuación (1) es equivalente a

$$|x| < |x|^2$$

$$\boxed{\text{3 puntos}}$$

Como $x \neq 0$, al multiplicar por $1/|x|$ la desigualdad anterior se obtiene:

$$1 < |x|$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Por tanto el conjunto solución es:

$$S = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

$\boxed{\text{1 punto}}$

Solución 2:

Primero que nada notamos que $x = 0$ no es solución de la inecuación, por tanto en lo que sigue consideraremos $x \neq 0$.

<u>Caso 1: $x < 0$</u>

En este caso (1) es equivalente a

$$-x < x^2$$

$$0 < x^2 + x$$

$$0 < x(x+1)$$

Como $x < 0$, la última desigualdad es equivalente a:

$$0 > (x+1)$$

$$-1 > x$$

Entonces la solución del caso 1 es $S_1 = (-\infty, -1)$

$\boxed{\text{2,5 puntos}}$

<u>Caso 2: $x > 0$</u>

En este caso (1) es equivalente a

$$x < x^2$$

$$0 < x^2 - x$$

$$0 < x(x-1)$$

Como $x > 0$, la última desigualdad es equivalente a:

$$0 < (x-1)$$

$$1 < x$$

Entonces la solución del caso 2 es $S_2 = (1, \infty)$.

$$\boxed{\text{2,5 puntos}}$$

Entonces la solución de (1) es:

$$S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

2. Considera el conjunto

$$A = \left\{ \frac{n+3}{n+1} / \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

¿Es A acotado? En caso afirmativo muestra cotas.

Solución 1:

Como tanto $n+3$ como $n+1$ son números positivos para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+3}{n+1} > 0$$

Entonces 0 es cota inferior de A.

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $3n > n$, por tanto para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\frac{n+3}{n+1} < \frac{3n+3}{n+1} = 3$$

Por tanto 3 es cota superior de A.

$\boxed{\text{3 puntos}}$

Por tanto A es acotado.

$\boxed{\text{1 punto}}$

Solución 2:

Notamos primero que

$$\frac{n+3}{n+1} = \frac{n+1+2}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1}$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Como $n \in \mathbb{N}$ y por tanto positivo, se tiene que $\dfrac{2}{n+1}$ es positivo y así se tiene que

$$1 + \frac{2}{n+1} > 1$$

Po lo tanto 1 es cota inferior de A.

$\boxed{\text{1 puntos}}$

Por otra parte como $n + 1 \geq 2$ para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\frac{2}{n+1} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Y por tanto

$$\frac{n+3}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1} \leq 2$$

luego 2 es cota superior de A.

Por lo tanto A es acotado.

$\boxed{\text{1 punto}}$