Quinto Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Abril, 2009

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija solo uno de los siguientes problemas.

1. Demuestra que si x, y son números reales tales que $xy < 0$, entonces $|x+y| < |x|+|y|$.

   Una solución:

   Observación 0.1 *Para todo número real x se tiene que $|x|^2 = x^2$*

   De hecho, si $x \geq 0$, entonces $x = |x|$ y por tanto $|x|^2 = x^2$. Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.

   $\boxed{\text{0,5 puntos}}$

   Observación 0.2 *Si a y b son no negativos y si $a^2 < b^2$, entonces $a < b$.*

   De hecho, $a^2 < b^2$ si y solo si $a^2 - b^2 < 0$, si y solo si $(a-b)(a+b) < 0$ como $a+b$ es no negativo, se tiene que $a-b$ es negativo, por lo tanto $a < b$.

   $\boxed{\text{0,5 puntos}}$

Ahora bien, por la Observación 0,1 se tiene que:

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Como $xy < 0$, entonces $xy < |xy| = |x||y|$, por lo tanto

$\boxed{\text{1 punto}}$

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = |x|^2+2xy+|y|^2 < |x|^2+2|x||y|+|y|^2 = (|x|+|y|)^2$$

$\boxed{\text{1 punto}}$

Por la observación 0,2 se tiene que

$$|x+y| < |x| + |y|$$

$\boxed{\text{1 punto}}$

<u>Otra Solución:</u>

Como $xy < 0$ se tiene que $|x| \neq 0 \neq |y|$ y además tienen diferente signo.

$\boxed{\text{1 punto}}$

Supongamos que $|x| < |y|$. En este caso

$$|x+y| = |y| - |x| < |y| - |x| + 2|x| = |x| + |y|$$

pues $|x|$ es estrictamente mayor que cero.

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Supongamos ahora que $|y| < |x|$. En este caso

$$|x + y| = |x| - |y| < |x| - |y| + 2|y| = |x| + |y|$$

pues $|y|$ es estrictamente mayor que cero.

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Por lo tanto, en cualquier caso se tiene que:

$$|x + y| < |x| + |y|$$

$\boxed{\text{1 punto}}$

2. Encuentra el conjunto de todos los números reales x, tales que la distancia de x a 0 es menor que la distancia de x a -1.

<u>Una solución:</u>[1]

Si $x \geq 0$ entonces $d(x, -1) = d(x, 0) + d(0, -1)$, luego $d(x, -1) > d(x, 0)$

$\boxed{\text{1 punto}}$

Si $x \leq -1$ entonces $d(x, 0) = d(x, -1) + d(-1, 0)$ luego $d(x, 0) > d(x, -1)$

$\boxed{\text{1 punto}}$

Si $-0,5 < x < 0$, entonces $0 < d(x, 0) < 0,5$ y $0,5 < d(x, -1) < 1$, luego $d(x, 0) < d(x, -1)$

$\boxed{\text{1,5 puntos}}$

[1] Para denotar la distancia entre x y y usaré la notación $d(x, y)$

Si $-1 < x \leq -0,5$, entonces $0,5 \leq d(x,0) < 1$ y $0 < d(x,0) \leq 0,5$, luego $d(x,0) \geq d(x,-1)$

$\boxed{\text{1,5 puntos}}$

Por lo tanto, $d(x,0) < d(x,-1)$ si y solo si $x \in (-0,5;\infty)$

$\boxed{\text{1 punto}}$

<u>Otra Solución:</u>

La distancia entre x y -1 es $|x+1|$ y la distancia entre x y 0 es $|x|$, por lo tanto buscamos todos los x tales que:

$$|x| < |x+1| \tag{1}$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

<u>Caso 1: $x \leq -1$</u>

En este caso $|x+1| = -x-1$ y $|x| = -x$ por lo tanto en este caso la inecuación (1) es equivalente a:

$$-x < -x-1$$
$$0 < -1$$

lo cual quiere decir que en este intervalo no tenemos ninguna solución.

$\boxed{\text{1 punto}}$

Caso 2: $x \geq 0$

En este caso $|x+1| = x+1$ y $|x| = x$, por lo tanto en este caso la inecuación (1) es equivalente a:

$$x < x+1$$
$$0 < 1$$

lo cual quiere decir que en este caso todo el intervalo $[0, \infty)$ es solución.

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Caso 3: $-1 < x < 0$

En este caso $|x+1| = x+1$ y $|x| = -x$, por lo tanto en este caso la inecuación (1) es equivalente a:

$$-x < x+1$$
$$-1 < 2x$$
$$\frac{-1}{2} < x$$

lo cual quiere decir que en este caso el intervalo $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$ es solución.

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Entonces todos los x que satisfacen (1) son los que viven en

$$\left(\frac{-1}{2}, 0\right) \cup [0, \infty) = \left(\frac{-1}{2}, \infty\right)$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$