Tercer Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Abril, 2007.

Tiempo: 20 minutos.

Nombre:

Elija sólo un problema

1. Una urna tiene 49 bolitas numeradas de las cuales 7 son premiadas. Se extaen 7 bolitas al azar sin repetición. ¿De cuantas maneras distintas puden salir al menos 5 bolitas premiadas?

   Solución:

   Decir que salgan al menos 5 bolitas premiadas, es lo mismo que decir, que salgan 5 bolitas premiadas o 6 bolitas premiadas o 7 bolitas premiadas.

   $\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

   Contemos separadamente:

   - Existe una única forma de obtener 7 premiadas de un total de 7 premiadas.

     $\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

   - Existen 7 formas de dejar una premiada en la urna y 42 formas de sacar una no premiada. Por lo tanto hay 7×42 maneras de obtener exactamente 6 premiadas y una no premiada.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

- Existen $\binom{7}{2} = 21$ maneras de dejar 2 premiadas en la urna y $\binom{42}{2} = 41 \times 21$ maneras de sacar dos bolitas no premiadas. Por lo tanto hay $21^2 \times 41$ maneras de obtenes exactamente 5 premiadas y dos no premiadas.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Entonces existen $1 + 7 \times 42 + 21^2 \times 41$ maneras de obtener al menos 5 bolitas premiadas. $\square$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Observación 0.1 *Es importante notar, que en cualquier formato que se presente el resultado correcto, se considerará puntaje máximo, por ejemplo:*

$$\binom{7}{7} + \binom{7}{6}\binom{42}{1} + \binom{7}{5}\binom{42}{2}$$

2. Demuestre que la siguiente número es divisible por 18, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} 3\binom{n}{k}2^{k+1}$$

Solución:

En efecto

$$\sum_{k=0}^{n} 3\binom{n}{k}2^{k+1} = 3 \cdot 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k} = 6\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k}1^{n-k}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Haciendo $a = 2$ y $b = 1$ en la igualdad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} 3\binom{n}{k} 2^{k+1} = 6\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = 6 \cdot 3^n = 18 \cdot 3^{n-1}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Como para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ se tiene que 3^{n-1} es entero, resulta que

$$\sum_{k=0}^{n} 3\binom{n}{k} 2^{k+1} = 6 \cdot 3^n = 18 \cdot 3^{n-1}$$

es divisible por 18. $\square$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$