Segundo Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Abril, 2008

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija solo un problema de entre los siguientes

1. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, demuestra que

$$\sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}$$

Solución 1:

Sea

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} / n = 1 \vee n = 2 \vee \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4} \right\}$$

Notamos primero que $1 \in A$ trivialmente.

Notamos también que $3 \in A$, de hecho

$$\sum_{k=3}^3 \binom{k}{3} = 1 = \binom{4}{4}$$

Notamos también que si $n = 1 \in A$, entonces $n + 1 \in A$. Si $n = 2 \in A$, entonces $n + 1 \in A$. Si $n \geq 3$ y si $n \in A$, entonces

$$\sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4},$$

2 puntos

Por lo tanto,

$$\sum_{k=3}^{n+1} \binom{k}{3} = \binom{n+1}{3} + \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{4}$$

2 puntos

Usando la igualdad de Pascal se tiene que

$$\sum_{k=3}^{n+1} \binom{k}{3} = \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{4} = \binom{n+2}{4}$$

Por lo tanto si $n \in A$ se tiene que $n+1 \in A$. Luego $A = \mathbb{N}$. Luego para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, se tiene que

$$\sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}$$

2 puntos

Solución 2:

Nota: Si el profesor vio en clases la versión de inducción que parte de n_0 en vez de 1, la presente solución es correcta. En caso que esta manera no se haya visto en clases descontar medio punto del puntaje calculado según lo de abajo.

Notamos primero que 3 satisface la condición propuesta, de hecho

$$\sum_{k=3}^3 \binom{k}{3} = 1 = \binom{4}{4}$$

1 punto

Sea $n \geq 3$ y n satisface la condición propuesta, es decir,

$$\sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4},$$

1 punto

Por lo tanto,

$$\sum_{k=3}^{n+1} \binom{k}{3} = \binom{n+1}{3} + \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{4}$$

2 puntos

Usando la igualdad de Pascal se tiene que

$$\sum_{k=3}^{n+1} \binom{k}{3} = \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{4} = \binom{n+2}{4}$$

Por lo tanto si $n + 1$ también satisface la condición propuesta, por lo tanto para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, se tiene que

$$\sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}$$

2 puntos

En ambas soluciones si no menciona que utiliza la formula de Pascal, descontar 0,2 puntos.

2. En el juego de póquer se reparten 5 cartas de un mazo inglés de 52 cartas. Se llama *trío* a la jugada donde hay tres cartas del mismo número, las otras dos pueden ser cualesquiera, pero de distinto número entre ellas y de distinto número del trío. ¿De cuántas maneras distintas puede salir trío en una *mano* de póquer?

Solución 1:

Tenemos 13 formas de escoger el “número” del trío, es decir, el trío puede ser de *As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q* o *K* y ese trío se puede escoger de 4 formas distintas, $\binom{4}{3}$, que son las formas de elegir las pintas del trío. Entonces tenemos 13×4 tríos distintos.

1 punto

Ahora bien ese trío, debe ser acompañada por una pareja, que no sea del número del trío, y de distinto número entre sí. Así el primer miembro de esta pareja se puede escoger de $52 - 4 = 48$ formas distintas,

2 puntos

para asegurar que no sea del mismo número del trío. El segundo miembro del trío puede ser escogido de $52 - (4 + 4) = 44$, para asegurarse que sea distinto del número del trío, y distinto del número del primer miembro de la pareja.

1 punto

Además como en la pareja no es importante quien es el primer miembro y quien es el segundo miembro, se tiene que el total de parejas a considerar es:

$$\frac{48 \times 44}{2}$$

Por tanto el número de tríos posibles en una mano de póquer es:

$$13 \times 4 \times \frac{48 \times 44}{2} = 54912.$$

2 punto

Solución 2:

Primero que nada calculemos el número de distintos *Full*, (un trío y un par).

Tenemos 13 formas de escoger el “número” del trío, es decir, el trío puede ser de $As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q$ o K y ese trío se puede escoger de 4 formas distintas, $\binom{4}{3}$, que son las formas de elegir las pintas del trío. Entonces tenemos 13×4 tríos distintos.

Para escoger el par, tenemos 12 formas de escoger el “número” del par, pues un número ya fue escogido en el trío, ese par se puede escoger de 6 formas distintas, $\binom{4}{2}$, que son las formas de elegir las pintas del par. Entonces tenemos 12×6 pares distintos y de número distinto del trío.

Entonces tenemos

$$13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3744$$

distintas manos de *Full*.

2 puntos

Ahora bien, calculemos el número de manos que pueden ser *un trío*. Al igual que antes, tenemos 13×4 formas de hacer el trío. La pareja que acompaña al trío, se puede obtener de $\binom{48}{2} = \frac{48 \times 47}{2}$ formas distintas.

2 puntos

Sin embargo ese número cuenta los *Full*. Por lo tanto el número de tríos posibles en una mano de póquer es:

$$13 \times 4 \times 48 \times \frac{47}{2} - 3744 = 58656 - 3744 = 54912$$

2 puntos