Cuarto Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Abril, 2009

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija solo un problema de entre los siguientes

1. Muestra que

$$(1 + \sqrt{5})^5 + (1 - \sqrt{5})^5$$

es un número entero divisible por 2^5 .

Solución

$$(1 + \sqrt{5})^5 + (1 - \sqrt{5})^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (\sqrt{5})^k + \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (-\sqrt{5})^k =$$

1 punto

$$\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} [(\sqrt{5})^k + (-\sqrt{5})^k]$$

1 punto

Como $(\sqrt{5})^k + (-\sqrt{5})^k$ es cero cuando k es impar y es $2(\sqrt{5})^k$ cuando k es par, se tiene que:

1,5 puntos

$$(1 + \sqrt{5})^5 + (1 - \sqrt{5})^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} [(\sqrt{5})^k + (-\sqrt{5})^k] = \sum_{k=0}^2 \binom{5}{2k} 2 \times 5^k =$$

1,5 puntos

$$2 \left[1 + \binom{5}{2} 5 + \binom{5}{4} 5 \right] = 2[1 + 10 \times 5 + 5 \times 5^2] = 2 \times 176 = 2 \times 2 \times 88 =$$

$$2^2 \times 8 \times 11 = 2^5 \times 11$$

1 punto

Por lo tanto, $(1 + \sqrt{5})^5 + (1 - \sqrt{5})^5 = 2^5 \times 11$, por lo tanto

$$(1 + \sqrt{5})^5 + (1 - \sqrt{5})^5$$

es entero y divisible por 2^5 .

2. Lanzas un dado y luego tantas monedas como indica el dado. ¿De cuántas maneras diferentes puedes obtener exactamente 2 caras?

Solución

El dado puede marcar 1, 2, 3, 4, 5 y 6, sin embargo si sale 1 no es posible que salgan dos caras.

0,5 puntos

Si el dado marca 2, existe una única forma que salgan dos caras, a saber cc.

0,5 puntos

Si el dado marca 3, existen $\binom{3}{2} = 3$ formas que salgan dos caras, que corresponden a las formas de escoger dos caras de un total de 3 posibilidades.

1 punto

Si el dado marca 4, existen $\binom{4}{2} = 6$ formas que salgan dos caras, que corresponden a las formas de escoger dos caras de un total de 4 posibilidades.

1 punto

Si el dado marca 5, existen $\binom{5}{2} = 10$ formas que salgan dos caras, que corresponden a las formas de escoger dos caras de un total de 5 posibilidades.

1 punto

Si el dado marca 6, existen $\binom{6}{2} = 15$ formas que salgan dos caras, que corresponden a las formas de escoger dos caras de un total de 5 posibilidades.

1 punto

En total hay

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$$

formas distintas de obtener exactamente dos caras.

1 punto

Nota: Es posible que algunos sepan que

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{7}{3}$$

en ese caso asignar puntaje máximo también.