Tercer Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Marzo, 2009

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija solo un problema de entre los siguientes

1. Demuestra que la siguiente proposición es cierta:

   Si se escogen 3 números de $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ *y luego se suman todos los números posibles de tres cifras distintas que se pueden formar con esos tres números fijos, entonces se obtiene un número divisible por 222.*

   (Ayuda: La descomposición de 439 en notación decimal es $4 \times 100 + 3 \times 10 + 9$)

   Solución:

   Si los números escogidos son a, b y c, entonces hay 6 números de tres cifras distintas que se pueden formar con ellos,

   $$\boxed{\text{3 puntos}}$$

   a saber son:

$100a + 10b + c$
$100a + 10c + b$
$100b + 10a + c$
$100b + 10c + a$
$100c + 10a + b$
$100c + 10b + a$

   Luego la suma S de esos números es:

   $S = 100(a+a+b+b+c+c)+10(a+a+b+b+c+c)+(a+a+b+b+c+c) =$

$\boxed{\text{1 punto}}$

$$100 \times 2(a+b+c) + 10 \times 2(a+b+c) + 2(a+b+c) =$$
$$(a+b+c)(100 \times 2 + 10 \times 2 + 2) = 222(a+b+c)$$

$\boxed{\text{1,5 puntos}}$

Como $a+b+c$ es un número entero, entonces 222 divide a S.

$\boxed{\text{0,5 puntos}}$

2. Considere cuatro cursos paralelos de matemáticas, y sus respectivos cuatro profesores (un profesor solo hace clases a uno de los cursos). Para la primera prueba del curso cada profesor le tomará la prueba a un curso distinto del propio. ¿De cuántas maneras distintas se pueden distribuir los profesores en los cursos?

Solución:

¿Cuántas distribuciones hay en que cada profesor está en su propio curso? Solo una.

$\boxed{\text{0,5 punto}}$

¿Cuántas distribuciones hay en que exactamente tres profesores está en su propio curso? Ninguna.

$\boxed{\text{0,5 punto}}$

¿Cuántas distribuciones hay en que exactamente dos profesores está en su propio curso?

$$\binom{4}{2} = 6$$

$\boxed{\text{1,5 puntos}}$

¿Cuántas distribuciones hay en que exactamente un profesor está en su propio curso?

Fijado un curso con su profesor, los otros tres se pueden distribuir de solo dos maneras para que queden todos distintos, a saber son:[1]

[1] $x \to y$ significará que el profesor x tomará el examen al curso y.

$a \to c, \quad b \to a, \quad c \to b$
$a \to b, \quad b \to c, \quad c \to a$

Por lo tanto, como se puede fijar cuatro cursos, entonces hay $2 \times 4 = 8$ distribuciones en que exactamente un profesor tome el examen a su propio curso.

$$\boxed{\text{2,5 puntos}}$$

Entonces, como hay $4! = 24$ maneras que se distribuyan los cursos sin ninguna restricción, entonces hay

$$4! - (1 + 6 + 8) = 9$$

maneras de que ningún profesor le tome el examen a su propio curso.

$$\boxed{\text{1 punto}}$$