

Guía ejercicios resueltos Sumatoria y Binomio de Newton

1. Calcule el valor de las siguientes sumatorias :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{j=1}^n 2k & \text{b) } \sum_{k=1}^n (3k+1) & \text{c) } \sum_{k=1}^n (6k-5) & \text{d) } \sum_{j=1}^n j(j+1) \quad \text{e) } \sum_{j=1}^n (2j-1)^2 \\ \text{f) } \sum_{j=1}^n 2j(2j+2) & \text{g) } \sum_{i=1}^n (2i-1)^3 & \text{h) } \sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) & \text{i) } \sum_{i=1}^n i^2(2i+3) \\ \text{j) } \sum_{i=7}^{20} i(3-2i)^2 & \text{k) } \sum_{i=10}^{50} \left(i - \frac{1}{2}\right)(2i-3) & & \end{array}$$

Solución:

a)

$$\sum_{j=1}^n 2k$$

Como k no depende de j , $2k$ es constante a la sumatoria.

$$\sum_{j=1}^n 2k = 2k \sum_{j=1}^n 1 = 2kn$$

b)

$$\sum_{k=1}^n (3k+1) = 3 \sum_{j=1}^n k + \sum_{j=1}^n 1$$

$$\sum_{k=1}^n (3k+1) = 3 \frac{(n+1)n}{2} + n$$

c)

$$\sum_{k=1}^n (6k-5) = 6 \sum_{j=1}^n k - 5 \sum_{j=1}^n 1$$

$$\sum_{k=1}^n (6k-5) = 6 \frac{(n+1)n}{2} - 5n$$

d)

$$\sum_{j=1}^n j(j+1) = \sum_{j=1}^n (j^2 + j) = \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n j$$

$$\sum_{j=1}^n j(j+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

e)

$$\sum_{j=1}^n (2j-1)^2 = \sum_{j=1}^n (4j^2 - 4j + 1) = 4 \sum_{j=1}^n j^2 - 4 \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n 1$$

$$\sum_{j=1}^n (2j-1)^2 = 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

f)

$$\sum_{j=1}^n 2j(2j+2) = \sum_{j=1}^n (4j^2 + 4j) = 4 \sum_{j=1}^n j^2 + 4 \sum_{j=1}^n j$$

$$\sum_{j=1}^n 2j(2j+2) = 4 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] + 4 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]$$

g)

$$\sum_{j=1}^n (2j-1)^3 = \sum_{j=1}^n (8j^3 - 12j^2 + 6j - 1) = 8 \sum_{j=1}^n j^3 - 12 \sum_{j=1}^n j^2 + 6 \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^n 1$$

$$\sum_{j=1}^n (2j-1)^3 = 8 \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right] - 12 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] + 6 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] + n$$

h)

$$\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = \sum_{j=1}^n (j^3 + 3j^2 + 2j) = \sum_{j=1}^n j^3 + 3 \sum_{j=1}^n j^2 + 2 \sum_{j=1}^n j$$

$$\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right] + 3 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] + 2 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]$$

Las demás se resuelven de la misma forma.

2. Calcule el valor de las siguientes sumatorias :

a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ c) $\sum_{k=1}^n 3(4^k + 2k^2) - 4k^3$

Solución:

a)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] = \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] + \dots + \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right] + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right]$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

b)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right]$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] + \dots + \left[\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right] + \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right]$$

Como es una sumatoria telescópica se salva el primero y el último.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

c)

$$\sum_{k=1}^n 3(4^k + 2k^2) - 4k^3 = 3 \sum_{k=1}^n 4^k + 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k^3$$

La sumatoria geométrica debería comenzar desde cero, pues conocemos la siguiente formula.

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Para empezar desde cero basta restarle uno a los límites de la sumatoria y a la vez sumar uno en la variable dentro de la sumatoria.

$$\sum_{k=1}^n 3(4^k + 2k^2) - 4k^3 = 3 \sum_{k=0}^{n-1} 4^{k+1} + 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k^3$$

$$\sum_{k=1}^n 3(4^k + 2k^2) - 4k^3 = 12 \sum_{k=0}^{n-1} 4^k + 6 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] - 4 \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right]$$

$$\sum_{k=1}^n 3(4^k + 2k^2) - 4k^3 = 12 \left[\frac{1-4^n}{1-4} \right] + 6 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] - 4 \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right]$$

3. Si $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 9$, $x_4 = -9$, $x_5 = 0$, $x_6 = -5$

Calcule el valor numérico de :

a) $\sum_{i=1}^3 (x_i - 2)$ b) $\sum_{i=1}^3 \frac{x_i + 2}{(x_i - 5)^2}$ c) $\sum_{i=1}^6 \frac{x_i^2 - 4}{x_i}$

Solución:

De esta sección solo realizare el primero, dada la simplicidad de los ejercicios.

$$\sum_{i=1}^3 (x_i - 2) = (x_1 - 2) + (x_2 - 2) + (x_3 - 2)$$

Dado los valores del enunciado para x_1, x_2, x_3 .

$$\sum_{i=1}^3 (x_i - 2) = (2 - 2) + (5 - 2) + (9 - 2) = 10$$

4. Calcular :

a) $\sum_{k=1}^n (2k - 1)$ b) $\sum_{k=1}^n (2k - 3)(k + 1)$ c) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ d) $\sum_{k=1}^n \frac{k+1}{(k+2)!}$
e) $\sum_{k=1}^n 5^{k-1}$ f) $\sum_{k=1}^n \left(\frac{-1}{3}\right)^{k-1}$ g) $\sum_{k=1}^n 4^{k-1}$ h) $\sum_{k=1}^n (2/3)^{k-1}$ i) $\sum_{k=1}^n (-5)^{k-1}$
j) $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$ k) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2^{i+j}$

Solución:

a)

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = 2 \sum_{k=1}^n k - n$$

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

b)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k-3)(k+1) &= \sum_{k=1}^n (2k^2 - k - 3) = 2 \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k - 3n \\ \sum_{k=1}^n (2k-3)(k+1) &= \sum_{k=1}^n (2k^2 - k - 3) = 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} - 3n \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] + \dots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] + \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right] \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= 1 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{(k+2)!} &= \sum_{k=1}^n \frac{k+1+1-1}{(k+2)!} \\ \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{(k+2)!} &= \sum_{k=1}^n \frac{(k+2)-1}{(k+2)!} \\ \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{(k+2)!} &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{k+2}{(k+2)!} - \frac{1}{(k+2)!} \right] \\ \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{(k+2)!} &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} \right] \\ \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{(k+2)!} &= \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right] + \left[\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right] + \dots + \left[\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right] \\ \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{(k+2)!} &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+2)!} \end{aligned}$$

e)

$$\sum_{k=1}^n 5^{k-1}$$

La sumatoria geométrica debería comenzar desde cero, pues conocemos la siguiente formula.

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Para empezar desde cero basta restarle uno a los límites de la sumatoria y a la vez sumar uno en la variable dentro de la sumatoria.

$$\sum_{k=1}^n 5^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 5^k = \frac{1 - 5^n}{1 - 5}$$

f)

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{-1}{3}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{-1}{3}\right)}$$

g)

$$\sum_{k=1}^n 4^{k-1}$$

La sumatoria geométrica debería comenzar desde cero, pues conocemos la siguiente formula.

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Para empezar desde cero basta restarle uno a los límites de la sumatoria y a la vez sumar uno en la variable dentro de la sumatoria.

$$\sum_{k=1}^n 4^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 4^k = \frac{1 - 4^n}{1 - 4}$$

h)

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)}$$

i)

$$\sum_{k=1}^n (-5)^{k-1}$$

La sumatoria geométrica debería comenzar desde cero, pues conocemos la siguiente formula.

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Para empezar desde cero basta restarle uno a los límites de la sumatoria y a la vez sumar uno en la variable dentro de la sumatoria.

$$\sum_{k=1}^n (-5)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-5)^k = \frac{1 - (-5)^n}{1 + 5}$$

j)

$$\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = \sum_{j=1}^n (j^3 + 3j^2 + 2j) = \sum_{j=1}^n j^3 + 3 \sum_{j=1}^n j^2 + 2 \sum_{j=1}^n j$$

$$\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right] + 3 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] + 2 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]$$

k) J

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^{i+j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^i 2^j$$

Para la sumatoria que esta más a la derecha el 2 elevado a la i, es independiente de j.

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^{i+j} = \sum_{i=0}^n 2^i \sum_{j=0}^n 2^j = \sum_{i=0}^n 2^i \left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2} \right] = \left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2} \right] \sum_{i=0}^n 2^i$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^{i+j} = \left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2} \right] \sum_{i=0}^n 2^i = \left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2} \right] \left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2} \right]$$

5. Calcular : $\sum_{k=1998}^n \frac{2k}{(1+k^2+k^4)}$ Recordar : $1+K^2+K^4 = (K^2+1)^2 - K^2$

Solución:

6. El segundo término de una progresión aritmética es 20 y el quinto es 56. Calcular el décimo término y la suma de los 10 primeros términos.

7. En una progresión aritmética el primer término es 4 y el de orden n es 34. Si la suma de los primeros n primeros es 247. Determinar n y la diferencia.

8. La suma de los 50 primeros términos de una P.A. es 200 y la suma de los 50 términos que siguen es 2700. Determine la P.A.

9. Una persona debe cancelar una deuda de \$360000 en 40 cuotas que forman una P.A. cuando 30 de los pagos están cubiertos la persona fallece, dejando la tercera parte de la deuda sin saldar. Calcular el valor de la primera cuota.

10. El cuarto término de una P.G. es 54 y el séptimo es $729/4$. Determine la progresión.

Solución:

6) Las progresiones aritméticas son de la siguiente forma:

$$(s+k) + (s+2k) + (s+3k) + \dots + (s+nk)$$

$$s+2k=20$$

$$s+5k=56$$

$$\Rightarrow k=12 \wedge s=-4$$

$$(s+10s) = (-4 + 10 \cdot 12) = 116$$

$$(s+k) + (s+2k) + (s+3k) + \dots + (s+10k) = \sum_{i=1}^{10} (s+ik) = 10(-4) + 12 \frac{10(10+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{10} (s+ik) = -40 + 12 \frac{10(10+1)}{2} = 620$$

7) Las progresiones aritméticas son de la siguiente forma:

$$(s + k) + (s + 2k) + (s + 3k) + \dots + (s + nk)$$

$$s + k = 4$$

$$s + nk = 34$$

$$\sum_{i=1}^n (s + ik) = 247$$

Calculemos la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^n (s + ik) = sn + k \frac{n(n+1)}{2} = 247$$

$$sn + k \frac{n^2 + n}{2} = 247$$

$$2sn + kn^2 + kn = 494$$

$$n(2s + kn + k) = 494$$

Ahora, sumemos las dos ecuaciones del enunciado.

$$s + k = 4$$

$$s + nk = 34$$

$$2s + nk + k = 38$$

$$\text{Reemplazando, } n(38) = 494 \Rightarrow n = 13$$

8) Las progresiones aritméticas son de la siguiente forma:

$$(s + k) + (s + 2k) + (s + 3k) + \dots + (s + nk)$$

$$\sum_{i=1}^{50} (s + ik) = 200$$

$$\sum_{i=51}^{100} (s + ik) = 2700$$

Calculemos la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{50} (s + ik) = 50s + k \frac{50(50+1)}{2} = 200$$

$$50s + 1275k = 200$$

$$\sum_{i=51}^{100} (s + ik) = \sum_{i=1}^{100} (s + ik) - \underbrace{\sum_{i=1}^{50} (s + ik)}_{=200} = 2700$$

$$\sum_{i=1}^{100} (s + ik) = 2900$$

$$100s + k \frac{100(100+1)}{2} = 2900$$

$$100s + 5050k = 2900$$

Tomado las dos ecuaciones;

$$50s + 1275k = 200 \quad (1)$$

$$100s + 5050k = 2900 \quad (2)$$

$$2 \cdot (1) - (2) \quad (5050 - 2 \cdot 1275)k = 2900 - 400$$

$$(2500)k = 2500$$

$$k = 1 \Rightarrow s = 21,5$$

9) Las progresiones aritméticas son de la siguiente forma:

$$(s + k) + (s + 2k) + (s + 3k) + \dots + (s + nk)$$

$$\sum_{i=1}^{40} (s + ik) = 360000$$

$$\sum_{i=31}^{40} (s + ik) = \frac{360000}{3}$$

Calculemos la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{40} (s + ik) = 40s + k \frac{40(40+1)}{2} = 360000$$

$$40s + 820k = 360000$$

$$\sum_{i=31}^{40} (s + ik) = \underbrace{\sum_{i=1}^{40} (s + ik)}_{360000} - \sum_{i=1}^{30} (s + ik) = 120000$$

$$360000 - \left[30s + k \frac{30(30+1)}{2} \right] = 120000$$

$$-30s - 465k = -240000$$

Tomado las dos ecuaciones;

$$40s + 820k = 360000 \quad (3)$$

$$30s + 465k = 240000 \quad (4)$$

$$3 \cdot (3) - 4 \cdot (4) \quad (820 \cdot 3 - 4 \cdot 465)k = 3 \cdot 360000 - 4 \cdot 240000$$

$$(600)k = 120000$$

$$k = 200 \Rightarrow s = 4900$$

10) Las progresiones geométricas son de la siguiente forma:

$$(a) + (ar) + (ar^2) + \dots + (ar^n) = a \sum_{i=0}^n r^i = a \left[\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \right]$$

$$ar^3 = 54$$

$$ar^6 = \frac{729}{4}$$

Resolviendo:

$$a = 54r^{-3}$$

$$(54r^{-3})r^6 = \frac{729}{4}$$

$$54r^3 = \frac{729}{4}$$

$$r = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 16$$

$$a \sum_{i=0}^n r^i = 16 \sum_{i=0}^n \left(\frac{3}{2} \right)^i$$

11. Siendo

$$S_j = \sum_{n=0}^{\infty} j \left(\frac{1}{j+1} \right)^n \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\text{demostrar } \sum_{j=1}^n S_j = \frac{n(n+3)}{2}$$

Solución:

Considere que,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

Para $r < 1$.

$$S_j = \sum_{n=0}^{\infty} j \left(\frac{1}{j+1} \right)^n = j \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{j+1} \right)^n = j \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{j+1}} \right] = j \left[\frac{1}{\frac{j}{j+1}} \right] = j+1$$

$$S_j = j+1$$

Ahora, debemos calcular:

$$\sum_{j=1}^n S_j = \sum_{j=1}^n (j+1) = \sum_{j=1}^n j + n$$

$$\sum_{j=1}^n S_j = \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\sum_{j=1}^n S_j = \frac{n(n+3)}{2}$$

12. En una P.G de 50 términos se sabe que el cuarto término es (-40) y que el séptimo es 320. Hallar el décimo término, la suma y el producto de los términos de posición impar.

Solución:

10) Las progresiones geométricas son de la siguiente forma:

$$(a) + (ar) + (ar^2) + \dots + (ar^n) = a \sum_{i=0}^n r^i = a \left[\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \right]$$

$$ar^3 = -40$$

$$ar^6 = 320$$

Resolviendo:

$$a = -40r^{-3}$$

$$(-40r^{-3})r^6 = 320$$

$$-40r^3 = 320$$

$$r^3 = -8$$

$$r = -2 \Rightarrow a = 5$$

El décimo término es igual a $ar^9 = 5 * (-2)^9 = -2560$

$$a \sum_{i=0}^n r^i = 5 \sum_{i=0}^n (-2)^i = 5 \left[\frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} \right] = \frac{5}{3} (1 - (-2)^{n+1})$$

14. Simplificar y calcular

$$\frac{7!}{5!} + \frac{12!}{14!} + \binom{8}{5} + \binom{8}{3} + \binom{15}{12} + \binom{13}{7} + \binom{8}{4} + 2 \binom{8}{5} + \binom{8}{6}$$

$$\binom{19}{15} + 2 \binom{19}{16} + \binom{19}{17} + \sum_{k=1}^5 \binom{8}{k} + \sum_{k=1}^{92} \binom{98}{k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k$$

Solución:

Usando que,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Simplificar y calcular.

Resolveremos los más difíciles, pues en los demás se puede utilizar la calculadora fácilmente.

$$\sum_{k=1}^{92} \binom{98}{k} = \binom{98}{1} + \binom{98}{2} + \binom{98}{3} + \dots + \binom{98}{91} + \binom{98}{92}$$

Pero sabemos que,

$$2^{98} = (1+1)^{98} = \sum_{k=0}^{98} \binom{98}{k} = \binom{98}{0} + \binom{98}{1} + \binom{98}{2} + \dots + \binom{98}{97} + \binom{98}{98}$$

$$2^{98} = \binom{98}{0} + \binom{98}{1} + \binom{98}{2} + \dots + \binom{98}{97} + \binom{98}{98}$$

Ahora, restemos a la última ecuación los términos que no están en la primera sumatoria.

$$2^{98} - \binom{98}{93} - \binom{98}{94} - \binom{98}{95} - \binom{98}{96} - \binom{98}{97} - \binom{98}{98}$$

$$= \binom{98}{1} + \binom{98}{2} + \dots + \binom{98}{91} + \binom{98}{92}$$

$$2^{98} - \binom{98}{93} - \binom{98}{94} - \binom{98}{95} - \binom{98}{96} - \binom{98}{97} - \binom{98}{98} = \sum_{k=1}^{92} \binom{98}{k}$$

Resolver (ultimo),

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k$$

Si consideramos, $a=2$ y $b=1$

$$(2 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

$$3^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

La unica diferecia con nuestra primera ecuación, es que una parte desde 1 y la otra desde cero. Consideremos la ultima ecuación y separemos el primer termino.

$$3^n = \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k$$

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n - \binom{n}{0}$$

15.Simplificar

$$\frac{(n+2)!}{n!}, \frac{n!-(n-1)!}{(n-1)!}, \left(\frac{4n}{3n} \right) \left(\frac{3n}{2n} \right) \left(\frac{2n}{n} \right), \frac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n}{3}}$$

Solución:

a)

$$\frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2)$$

b)

$$\frac{n! - (n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)!(n-1)}{(n-1)!} = (n-1)$$

c)

$$\frac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n}{3}} = \frac{\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}}{\frac{n!}{3!(n-3)!}} = \frac{3!(n-3)!(n+1)!}{3!(n-2)!n!} = \frac{(n+1)}{(n-2)}$$

d)

$$\binom{4n}{3n} \binom{3n}{2n} \binom{2n}{n} = \left(\frac{[4n]!}{[3n]! [n]!} \right) \left(\frac{[3n]!}{[2n]! [n]!} \right) \left(\frac{[2n]!}{[n]! [n]!} \right)$$

$$\binom{4n}{3n} \binom{3n}{2n} \binom{2n}{n} = \left(\frac{[4n]!}{[n]!^4} \right)$$

16. Calcular n

$$\binom{n}{2} = 55, \quad \binom{n}{n-2} = 10, \quad \binom{n}{3} = \binom{n}{5}$$

Solución:

a)

$$\binom{n}{2} = 55$$

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 55$$

$$(n)(n-1) = 110$$

$$n = 11$$

b)

$$\binom{n}{n-2} = 10$$

$$\frac{n!}{(n-2)!2!} = 10$$

$$(n)(n-1) = 20$$

$$n = 5$$

c)

$$\binom{n}{3} = \binom{n}{5}$$

$$\frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n!}{5!(n-5)!}$$

$$5! = \frac{3!}{(n-5)!} (n-3)!$$

$$5! = 3! (n-3)(n-4)$$

$$\frac{5!}{3!} = (n-3)(n-4)$$

$$20 = n^2 - 7n + 12$$

$$0 = n^2 - 7n - 8$$

$$0 = (n-8)(n+1)$$

17.Desarrollar

$$(3x+2y)^6, \quad (1-x)^7, \quad \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^6, \quad \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^5$$

Solución:

Usando que,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

a)

$$(3x + 2y)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (3x)^k (2y)^{6-k}$$

$$(3x + 2y)^6 = \binom{6}{0} (3x)^0 (2y)^{6-0} + \binom{6}{1} (3x)^1 (2y)^{6-1} + \dots + \binom{6}{6} (3x)^6 (2y)^{6-6}$$

b)

$$(1 - x)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} (-x)^k (1)^{6-k} = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} (-x)^k$$

$$(1 - x)^7 = \binom{7}{0} (-x)^0 + \binom{7}{1} (-x)^1 + \dots + \binom{7}{7} (-x)^6$$

$$(1 - x)^7 = \binom{7}{0} - \binom{7}{1} (x)^1 + \dots + \binom{7}{7} (x)^6$$

c)

$$\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^k \left(\frac{1}{x}\right)^{6-k}$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} x^{\frac{k}{3}} (x^{-1})^{6-k}$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} x^{\frac{k}{3}} x^{k-6}$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} x^{\frac{4k}{3}-6}$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x}\right)^6 = \binom{6}{0} x^{-6} + \binom{6}{1} x^{\frac{4}{3}-6} + \dots + \binom{6}{6} x^{\frac{24}{3}-6}$$

d)

$$\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (x^3)^k \left(-\frac{1}{x}\right)^{5-k}$$

$$\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^{3k} (-x^{-1})^{5-k}$$

$$\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^{3k} x^{k-5} (-1)^{5-k}$$

$$\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^{4k-5} (-1)^{5-k}$$

$$\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^5 = \binom{5}{0} x^{-5} (-1)^5 + \binom{5}{1} x^{4-5} (-1)^4 + \dots + \binom{5}{5} x^{20-5} (-1)^0$$

18. Encontrar los coeficientes de los términos indicados en los desarrollos correspondientes.

i) x^{11} en $(3x + 2x^2)^7$ ii) x^2 en $(\sqrt[3]{x} - 2/x^2)^{27}$ iii) x^5 en $\left(2x - \frac{3}{x}\right)^{13}$

iv) x^{2r} en $(1 - x^2)^{4r}$

Solución:

a)

$$(3x + 2x^2)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} (2x^2)^k (3x)^{7-k}$$

$$(3x + 2x^2)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} 2^k x^{2k} x^{7-k} 3^{7-k}$$

$$(3x + 2x^2)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} 2^k 3^{7-k} x^{7+k}$$

Como nos piden encontrar el coeficiente que acompaña al x^{11} , basta igualar el exponente del x^{7+k} a 11.

$$7 + k = 11$$

$$k = 4$$

Entonces, para $k = 4$ encontraremos el coeficiente que acompaña a x^{11} .

$$\binom{7}{4} 2^4 3^{7-4} x^{7+4} = \binom{7}{4} 2^4 3^3 x^{11}$$

$$\text{Coef} = \binom{7}{4} 2^4 3^3$$

b)

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x^2}\right)^{27} = \sum_{k=0}^{27} \binom{27}{k} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^k \left(2x^{-2}\right)^{27-k}$$

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x^2}\right)^{27} = \sum_{k=0}^{27} \binom{27}{k} 2^{27-k} x^{\frac{k}{3}} x^{-54+2k}$$

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x^2}\right)^{27} = \sum_{k=0}^{27} \binom{27}{k} 2^{27-k} x^{-54+2k+\frac{k}{3}}$$

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x^2}\right)^{27} = \sum_{k=0}^{27} \binom{27}{k} 2^{27-k} x^{-54+\frac{7k}{3}}$$

Como nos piden encontrar el coeficiente que acompaña al x^2 , basta igualar el exponente de $x^{-54+\frac{7k}{3}}$ a 2.

$$-54 + \frac{7k}{3} = 2$$

$$k = 24$$

Entonces, para $k = 24$ encontraremos el coeficiente que acompaña a x^2 .

$$\binom{27}{24} 2^{27-24} x^{-54+\frac{7 \cdot 24}{3}}$$

$$\text{Coef} = \binom{27}{24} 2^3$$

c) Es análogo a los dos anteriores.

d)

$$(1-x^2)^{4r} = \sum_{k=0}^{4r} \binom{4r}{k} (-x^2)^k (1)^{4r-k}$$

$$(1-x^2)^{4r} = \sum_{k=0}^{4r} \binom{4r}{k} (-1)^k x^{2k}$$

Como nos piden encontrar el coeficiente que acompaña al x^{2r} , basta igualar el exponente de x^{2k} a $2r$.

$$2k = 2r$$

$$k = r$$

Entonces, para $k = r$ encontraremos el coeficiente que acompaña a x^{2r} .

$$\binom{4r}{r}(-1)^r x^{2r}$$

$$\text{Coef} = \binom{4r}{r}(-1)^r$$

19. Encuentre los términos centrales en el desarrollo de

$$\text{a) } \left(3a - \frac{6}{a}\right)^{10}$$

$$\left(3a - \frac{6}{a}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{-6}{a}\right)^k (3a)^{10-k}$$

$$\left(3a - \frac{6}{a}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-6)^k a^{-k} a^{10-k} 3^{10-k}$$

$$\left(3a - \frac{6}{a}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-6)^k 3^{10-k} a^{10-2k}$$

Como nos piden encontrar el término central del desarrollo del binomio $\left(3a - \frac{6}{a}\right)^{10}$,

basta tomar el $k = 5$, pues la sumatoria va desde 0 a 10 siendo el término central el $k = 5$.

Entonces, el término central es igual a:

$$\binom{10}{5}(-6)^5 3^{10-5} a^{10-2 \cdot 5} = \binom{10}{5}(-6)^5 3^5 = \binom{10}{5}(-18)^5 = -\binom{10}{5}(18)^5$$

$$\text{b) } \left(\frac{4x}{5} - \frac{5}{2x}\right)^5$$

$$\left(\frac{4x}{5} - \frac{5}{2x}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \left(\frac{-5}{2x}\right)^k \left(\frac{4x}{5}\right)^{5-k}$$

$$\left(\frac{4x}{5} - \frac{5}{2x}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \left(\frac{-5}{2}\right)^k x^{-k} \left(\frac{4}{5}\right)^{5-k} x^{5-k}$$

$$\left(\frac{4x}{5} - \frac{5}{2x}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \left(\frac{-5}{2}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{5-k} x^{5-2k}$$

Como nos piden encontrar el termino central del desarrollo del binomio $\left(\frac{4x}{5} - \frac{5}{2x}\right)^5$,

basta tomar el $k = 2$ y el $k = 3$, pues la sumatoria va desde 0 a 5 existiendo dos términos centrales, debido a que son 6 términos los del desarrollo.

Entonces, el
término central
es igual a:

$$\begin{aligned} \text{Termino} &= \binom{5}{2} \left(\frac{-5}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^{5-2} x^{5-2*2} + \binom{5}{3} \left(\frac{-5}{2}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^{5-3} x^{5-2*3} \\ &= \binom{5}{2} \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^3 x - \binom{5}{3} \left(\frac{5}{2}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 x^{-1} \\ &= \binom{5}{2} \left(\frac{4^2}{5}\right) x - \binom{5}{3} 10 x^{-1} \end{aligned}$$

c) $(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x})^{24}$, con $0 < a < b$

$$(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x})^{24} = \sum_{k=0}^{24} \binom{24}{k} (\sqrt{a-x})^k (\sqrt{b-x})^{24-k}$$

$$(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x})^{24} = \sum_{k=0}^{24} \binom{24}{k} (\sqrt{a-x})^k (\sqrt{b-x})^{24-k}$$

Como nos piden encontrar el termino central del desarrollo del binomio

$(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x})^{24}$, basta tomar el $k = 12$, pues la sumatoria va desde 0 a 24 siendo el termino central el $k = 12$.

Entonces, el término central es igual a:

$$\begin{aligned} \text{Termino} &= \binom{24}{12} (\sqrt{a-x})^{12} (\sqrt{b-x})^{24-12} \\ &= \binom{24}{12} (a-x)^6 (b-x)^6 \end{aligned}$$

20. Encontrar el término independiente de x en el desarrollo.

$$\text{a) } \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x} \right)^9$$

$$\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x} \right)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \left(\frac{-1}{3x} \right)^k \left(\frac{3x^2}{2} \right)^{9-k}$$

$$\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x} \right)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \left(\frac{-1}{3} \right)^k x^{-k} \left(\frac{3}{2} \right)^{9-k} x^{18-2k}$$

$$\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x} \right)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \left(\frac{-1}{3} \right)^k \left(\frac{3}{2} \right)^{9-k} x^{18-3k}$$

Como nos piden encontrar el termino independiente de x del binomio $\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x} \right)^9$,

basta igualar a cero el exponente de x^{18-3k} , pues el termino independiente de x esta elevado a la cero.

$$18 - 3k = 0$$

$$k = 6$$

Entonces, el término independiente es:

$$\begin{aligned} \text{Termino(indepen)} &= \binom{9}{6} \left(\frac{-1}{3} \right)^6 \left(\frac{3}{2} \right)^{9-6} x^{18-3*6} \\ &= \binom{9}{6} \left(\frac{1}{3} \right)^6 \left(\frac{3}{2} \right)^3 \\ &= \binom{9}{6} \left(\frac{1}{6} \right)^3 \end{aligned}$$

$$a) \left(x - \frac{1}{x^2} \right)^{3n}$$

$$\left(x - \frac{1}{x^2} \right)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \left(\frac{-1}{x^2} \right)^k (x)^{3n-k}$$

$$\left(x - \frac{1}{x^2} \right)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} (-1)^k x^{-2k} x^{3n-k}$$

$$\left(x - \frac{1}{x^2} \right)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} (-1)^k x^{3n-3k}$$

Como nos piden encontrar el término independiente de x del binomio $\left(x - \frac{1}{x^2} \right)^{3n}$,

basta igualar a cero el exponente de x^{3n-3k} , pues el término independiente de x está elevado a la cero.

$$3n - 3k = 0$$

$$k = n$$

Entonces, el término independiente es:

$$\text{Término(indepen)} = \binom{3n}{n} (-1)^n x^{3n-3n}$$

$$= \binom{3n}{n} (-1)^n$$

21. Calcular el valor numérico del término independiente de x .

$$\left(3x^{65} + 2 \right) \left(x - \frac{1}{x^2} \right)^{3n}$$

Solución:

$$\left(3x^{65} + 2 \right) \left(x - \frac{1}{x^2} \right)^{3n} = \left(3x^{65} + 2 \right) \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \left(\frac{-1}{x^2} \right)^k (x)^{3n-k}$$

$$\left(3x^{65} + 2 \right) \left(x - \frac{1}{x^2} \right)^{3n} = \left(3x^{65} + 2 \right) \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} (-1)^k x^{-2k} x^{3n-k}$$

$$\left(3x^{65} + 2 \right) \left(x - \frac{1}{x^2} \right)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} 3(-1)^k x^{3n-3k+65} + \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} 2(-1)^k x^{3n-3k}$$

Como nos piden encontrar el termino independiente de x del binomio

$\left(3x^{65} + 2\right)\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{3n}$, basta igualar a cero el exponente de $x^{3n-3k+65}$ y el de x^{3n-3k} , pues por cada sumatoria podría existir un termino independiente de x .

Para la primera sumatoria:

$$3n - 3k + 65 = 0$$

$$k = n + \frac{65}{3}$$

Como el k no es un número entero positivo, implica que ese término no existe.

Para la segunda sumatoria:

$$3n - 3k = 0$$

$$k = n$$

Entonces, el término independiente es:

$$\begin{aligned} \text{Termino(indepen)} &= \binom{3n}{n} 2(-1)^n x^{3n-3n} \\ &= \binom{3n}{n} 2(-1)^n \end{aligned}$$

Es decir, la primera sumatoria no aporta nada.

22. Calcular el coeficiente de x^{-2} en el desarrollo de $x: x^2 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^{28}$

$$x^2 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^{28} = x^2 \sum_{k=0}^{28} \binom{28}{k} \left(\frac{-1}{x^2}\right)^k (x^2)^{28-k}$$

$$x^2 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^{28} = x^2 \sum_{k=0}^{28} \binom{28}{k} (-1)^k x^{-2k} x^{56-2k}$$

$$x^2 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^{28} = x^2 \sum_{k=0}^{28} \binom{28}{k} (-1)^k x^{56-4k}$$

$$x^2 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^{28} = \sum_{k=0}^{28} \binom{28}{k} (-1)^k x^{58-4k}$$

Como nos piden encontrar el coeficiente de x^{-2} del binomio $x^2\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^{28}$, basta

igualar a -2 el exponente de x^{58-4k} , lo que permitirá conocer el k necesario para encontrar el coeficiente

$$58 - 4k = -2$$

$$k = 15$$

Entonces, el coeficiente de x^{-2}

$$\text{Termino} = \binom{28}{15} (-1)^{15} x^{58-4 \cdot 15}$$

$$= -\binom{28}{15} x^{-2}$$

$$\text{Coef} = -\binom{28}{15}$$

23. Determinar el valor de a para los coeficientes de x^7 y x^6 en el desarrollo de:

$(x+a)^5(x-2a)^3$ sean iguales.

Solución:

$$(x+a)^5(x-2a)^3 = (x-2a)^3 \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k a^{5-k}$$

$$(x+a)^5(x-2a)^3 = \left[x^3 - 6ax^2 + 12a^2x - 8a^3 \right] \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k a^{5-k}$$

$$= x^3 \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k a^{5-k} - 6ax^2 \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k a^{5-k} + 12a^2x \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k a^{5-k} - 8a^3 \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k a^{5-k}$$

$$= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^{k+3} a^{5-k} - 6 \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^{k+2} a^{6-k} + 12 \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^{k+1} a^{7-k} - 8 \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k a^{8-k}$$

- Tenemos cuatro sumatoria que nos aportaran coeficientes para x^7 y x^6 .

- Como nos piden encontrar el coeficiente de x^6 del binomio $(x+a)^5(x-2a)^3$, basta

igualar a 6 el exponente de x^{k+3} , x^{k+2} , x^{k+1} y x^k , lo que permitirá conocer el k necesario para encontrar el coeficiente de cada sumaria:

Primera sumatoria:

$$k + 3 = 6$$

$$k = 3$$

$$Coef_1 = \binom{5}{3} a^{5-3} = \binom{5}{3} a^2$$

Segunda sumaria

$$k + 2 = 6$$

$$k = 4$$

$$Coef_2 = -6 \binom{5}{4} a^{6-4} = -6 \binom{5}{4} a^2$$

Tercera sumaria

$$k + 1 = 6$$

$$k = 5$$

$$Coef_3 = 12 \binom{5}{5} a^{7-5} = 12 \binom{5}{5} a^2$$

Cuarta sumaria

$$k = 6$$

No aporta nada, debido a que el mayor valor que puede tomar k es 5.

$$Coef_6 = Coef_1 + Coef_2 + Coef_3$$

$$Coef_6 = \binom{5}{3} a^2 - 6 \binom{5}{4} a^2 + 12 \binom{5}{5} a^2$$

$$Coef_6 = 10a^2 - 30a^2 + 12a^2$$

$$Coef_6 = -8a^2$$

- Como nos piden encontrar el coeficiente de x^7 del binomio $(x+a)^5(x-2a)^3$, basta igualar a 7 el exponente de x^{k+3} , x^{k+2} , x^{k+1} y x^k , lo que permitirá conocer el k necesario para encontrar el coeficiente de cada sumaria:

Primera sumatoria:

$$k + 3 = 7$$

$$k = 4$$

$$Coef_1 = \binom{5}{4} a^{5-4} = \binom{5}{4} a$$

Segunda sumaria

$$k + 2 = 7$$

$$k = 5$$

$$Coef_2 = -6 \binom{5}{5} a^{6-5} = -6 \binom{5}{5} a$$

Tercera sumaria

$$k + 1 = 7$$

$$k = 6$$

No aporta nada, debido a que el mayor valor que toma k es 5.

Cuarta sumaria

$$k = 7$$

No aporta nada, debido a que el mayor valor que toma k es 5.

$$Coef_7 = Coef_1 + Coef_2 +$$

$$Coef_7 = \binom{5}{4} a - 6 \binom{5}{5} a$$

$$Coef_7 = 5a - 6a$$

$$Coef_7 = -a$$

Ahora, igualando el $Coef_7$ a $Coef_6$.

$$Coef_6 = Coef_7$$

$$-8a^2 = -a$$

$$a(8a - 1) = 0$$

Es decir, para $a_1 = 0 \wedge a_2 = \frac{1}{8}$ los coeficientes de x^7 y x^6 son iguales.

24. Hallar el coeficiente de x^7 en el desarrollo de: $(1 - x^2 - x^3)^n$

Desarrollo:

$$(1 - x^2(1 + x))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x^2(1 + x))^k 1^{n-k}$$

$$(1 - x^2(1 + x))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{2k} (1 + x)^k$$

$$(1 - x^2(1 + x))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{2k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i$$

$$(1 - x^2(1 + x))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{2k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i$$

Para la sumatoria que depende de i , los términos que dependen de k son constantes.

$$(1 - x^2(1 + x))^n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{i} (-1)^k x^{2k+i}$$

Como nos piden encontrar el coeficiente de x^7 del polinomio $(1 - x^2 - x^3)^n$, basta igualar a 7 el exponente de x^{2k+i} , de esa manera conoceremos los posibles valores que pueden tomar k e i .

$$2k + i = 7$$

Con las siguientes restricciones,

$$0 \leq i \leq k \leq n$$

Ahora,

$$k = 0 \Rightarrow i = 7 \Rightarrow \Leftarrow \text{Debido a que } i \leq k$$

$$k = 1 \Rightarrow i = 5 \Rightarrow \Leftarrow \text{Debido a que } i \leq k$$

$$k = 2 \Rightarrow i = 3 \Rightarrow \Leftarrow \text{Debido a que } i \leq k$$

$$k = 3 \Rightarrow i = 1 \text{ Este caso cumple con } 0 \leq i \leq k \leq n$$

$$k = 4 \Rightarrow i = -1 \Rightarrow \Leftarrow \text{Debido a que } 0 \leq i \leq k \leq n$$

Luego, la única solución es con $k = 3 \Rightarrow i = 1$

$$coef = \binom{n}{3} \binom{3}{1} (-1)^3$$

$$coef = -\binom{n}{3} \binom{3}{1}$$

25.

$$\text{i) } \sum_{k=0}^{144} k \cdot \binom{144}{k}$$

Desarrollo:

$$\sum_{k=0}^{423} \binom{423}{k} = \sum_{k=0}^{423} \binom{423}{k} 1^k 1^{423-k}$$

$$\sum_{k=0}^{423} \binom{423}{k} = (1+1)^{423}$$

$$\sum_{k=0}^{423} \binom{423}{k} = 2^{423}$$

$$\text{ii) } \sum_{k=0}^{1012} (-1)^k \binom{1012}{k}$$

Desarrollo:

$$\sum_{k=0}^{1012} (-1)^k \binom{1012}{k} = \sum_{k=0}^{1012} \binom{1012}{k} (-1)^k 1^{1012-k}$$

$$\sum_{k=0}^{1012} (-1)^k \binom{1012}{k} = (1-1)^{1012}$$

$$\sum_{k=0}^{1012} (-1)^k \binom{1012}{k} = 0$$

$$\text{iii) } \sum_{k=0}^{144} k \cdot \binom{144}{k}$$

Desarrollo:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{144} k \cdot \binom{144}{k} &= \sum_{k=1}^{144} k \cdot \frac{144!}{k!(144-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{144} \frac{144!}{(k-1)!(144-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{144} \frac{144!}{(k-1)!(144-k+1-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{144} \frac{144!}{(k-1)!(143-k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{144} \frac{144!}{(k-1)!(143-(k-1))} \\
&= \sum_{k=1}^{144} \frac{143! \cdot 144}{(k-1)!(143-(k-1))} \\
&= 144 \sum_{k=1}^{144} \frac{143!}{(k-1)!(143-(k-1))} \\
&= 144 \sum_{k=1}^{144} \binom{143}{k-1} \\
&= 144 \cdot \left(\binom{143}{0} + \binom{143}{1} + \binom{143}{2} + \dots + \binom{143}{142} + \binom{143}{143} \right) \\
&= 144 \sum_{k=0}^{143} \binom{143}{k} \\
&= 144 \sum_{k=0}^{143} \binom{143}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{143-k} \\
&= 144 \cdot (1+1)^{143} \\
&= 144 \cdot 2^{143}
\end{aligned}$$

$$\text{iv) } \sum_{k=0}^{1998} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot \binom{1998}{k}$$

Desarrollo:

Multiplicaremos por 1, para reordenar la combinatoria.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{1998} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot \binom{1998}{k} = \sum_{k=0}^{1998} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot \binom{1998}{k} \frac{1999 \cdot 2000}{1999 \cdot 2000} \\
&= \sum_{k=0}^{1998} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot \frac{1998!}{k! \cdot (1998-k)!} \frac{1999 \cdot 2000}{1999 \cdot 2000} \\
&= \sum_{k=0}^{1998} \frac{2000!}{(k+2)! \cdot (1998-k)!} \frac{1}{1999 \cdot 2000} \\
&= \frac{1}{1999 \cdot 2000} \sum_{k=0}^{1998} \frac{2000!}{(k+2)! \cdot (1998-k-2+2)!} \\
&= \frac{1}{1999 \cdot 2000} \sum_{k=0}^{1998} \frac{2000!}{(k+2)! \cdot (2000-(k+2))!} \\
&= \frac{1}{1999 \cdot 2000} \sum_{k=0}^{1998} \binom{2000}{k+2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1999 \cdot 2000} \left[\binom{2000}{2} + \binom{2000}{3} + \binom{2000}{4} + \binom{2000}{5} + \dots + \binom{2000}{1999} + \binom{2000}{2000} \right]$$

Ahora, sumemos cero dentro del paréntesis.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1999 \cdot 2000} \left[\binom{2000}{2} + \binom{2000}{3} + \dots + \binom{2000}{2000} + \overbrace{\binom{2000}{0} - \binom{2000}{0}}^{=0} + \underbrace{\binom{2000}{1} - \binom{2000}{1}}_{=0} \right] \\
&= \frac{1}{1999 \cdot 2000} \left[\binom{2000}{0} + \binom{2000}{1} + \binom{2000}{2} + \dots + \binom{2000}{1999} + \binom{2000}{2000} - \binom{2000}{0} - \binom{2000}{1} \right] \\
&= \frac{1}{1999 \cdot 2000} \left[\sum_{k=0}^{2000} \binom{2000}{k} - \binom{2000}{0} - \binom{2000}{1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1999 \cdot 2000} \left[\sum_{k=0}^{2000} \binom{2000}{k} 1^k \cdot 1^{2000-k} - \binom{2000}{0} - \binom{2000}{1} \right] \\
&= \frac{1}{1999 \cdot 2000} \left[(1+1)^{2000} - \binom{2000}{0} - \binom{2000}{1} \right] \\
&= \frac{1}{1999 \cdot 2000} \left[2^{2000} - \binom{2000}{0} - \binom{2000}{1} \right] \\
&= \frac{1}{1999 \cdot 2000} [2^{2000} - 2001]
\end{aligned}$$

26. Determine:

i) a_7 en $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 6n$

Desarrollo:

Partamos con algo conocido,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n 2k = n^2 + n$$

Sumemos a toda la ecuación $5n$.

$$\sum_{k=1}^n 2k + 5n = n^2 + n + 5n$$

$$\sum_{k=1}^n 2k + 5 \sum_{k=1}^n 1 = n^2 + 6n$$

$$\sum_{k=1}^n 2k + \sum_{k=1}^n 5 = n^2 + 6n$$

$$\sum_{k=1}^n 2k + 5 = n^2 + 6n$$

Por enunciado,

$$\sum_{k=1}^n 2k + 5 = n^2 + 6n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$a_k = 2k + 5$$

$$a_7 = 19$$

ii) t_7 en $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2x}{y}\right)^7$

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2x}{y}\right)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^k \left(\frac{2x}{y}\right)^{7-k} = \sum_{k=0}^7 t_k$$

$$t_k = \binom{7}{k} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^k \left(\frac{2x}{y}\right)^{7-k}$$

$$t_7 = \binom{7}{7} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^7 \left(\frac{2x}{y}\right)^{7-7} \Rightarrow t_7 = x^{\frac{7}{3}}$$

iii) t_5 en $\left(\frac{4x^3}{5} + \frac{2}{3x^2}\right)^{20}$

$$\left(\frac{4x^3}{5} + \frac{2}{3x^2}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \left(\frac{4x^3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{3x^2}\right)^{20-k} = \sum_{k=0}^{20} t_k$$

$$t_k = \binom{20}{k} \left(\frac{4x^3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{3x^2}\right)^{20-k}$$

$$t_5 = \binom{20}{5} \left(\frac{4x^3}{5}\right)^5 \left(\frac{2}{3x^2}\right)^{20-5}$$

$$t_5 = \binom{20}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^{15} \frac{1}{x^{15}}$$

iv) t_5 en $(2x-y)^{12}$

$$(2x-y)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (-y)^k (2x)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} t_k$$

$$t_k = \binom{12}{k} (-y)^k (2x)^{12-k}$$

$$t_5 = \binom{12}{5} (-y)^5 (2x)^{12-5}$$

$$t_7 = -\binom{12}{5} y^5 (2x)^7$$