Primera Guía de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Marzo, 2007

1. Decida cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) cierta(s).

   a) La suma de los primeros n números naturales es el semi-producto entre n y su sucesor.

   b) La suma de un número natural y su cuadrado es un número par.

   c) La suma de los primeros n números impares es igual al $n-$ésimo cuadrado.

   d) n^2+n+41 es un número primo independiente del valor que pueda tomar $n \in \mathbb{N}$

   e) Un conjunto con n elementos, tiene 2^n subconjuntos.

   f) Si en una fiesta hay n personas y todos se saludan entre sí una sola vez, entonces en total hay $\frac{n(n-1)}{2}$ saludos.

   g) 9 divide a $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

   h) Si x es positivo entonces $(1+x)^n \geq 1 + nx$ para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

   i) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

   j) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

   $$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 \leq \frac{n^4}{4} \leq 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^4$$

   k) Sea $a_1 = \sqrt{2}$ y defina $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $a_n < 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y además $a_n < a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

   l) Demostrar por inducción: Si a_1 es dado y se define $a_{n+1} = 2a_n + 1$ para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$, entonces

   $$a_n + 1 = 2^{n-1}(a_1 + 1)$$

   m) La cantidad máxima de regiones en que n rectas dividen el plano es $\frac{n(n+1)}{2} + 1$.

2. Use el símbolo $\sum$ para abreviar las sumas que aparecen y resuelva los problemas.

   a) Calcule el valor de la suma de los primeros n cuadrados.

b) Calcule la suma de los primeros n números pares.

c) Calcule

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}$$

d) Calcule

$$1+r+r^2+r^3+r^4+\cdots+r^n$$

e) Calcule la suma de los primeros n cubos.

f) Calcule

$$1+1+x+1+x+x^2+1+x+x^2+x^3+1+x+x^2+x^3+x^4+1+x+$$

$$x^2+x^3+x^4+x^5$$

g) Un jardinero, Don Ramón, tiene que regar 10 árboles que están dispuestos en una hilera separados entre si por $6m$, Don Ramón regará los árboles con un balde que llenará de una llave que está a $10m$ del primer árbol ¿Cuánto habrá caminado Don Ramón después de regar el último árbol?

h) El abuelo de Carlos le ofrece: *mire Carlitos hoy le daré* 500 *bolitas, mañana* 1000 *bolitas, pasado mañana* 1500 *bolitas, al otro día* 2000 *bolitas y así sucesivamente* 500 *bolitas mas que el día anterior por dos años, o bien si ud. prefiere hoy le doy una bolita, mañana* 2 *bolitas, pasado* 4 *bolitas, al otro día* 8 *bolitas, y así sucesivamente el doble de bolitas que el día anterior por un mes. Bien Carlitos, ¿qué prefiere?.* Si tu fueses Carlos ¿Cuál de las opciones tomarías?

i) Dos trenes viajan por la misma línea férrea a $40km/h$ en direcciones opuestas y acercándose entre ellos, cuando los separan $100km$ sale un juguete volador electrónico de uno de los trenes a una velocidad de $80km/h$, cuando llega al tren opuesto se devuelve, cuando llega al primero se devuelve al segundo y así sucesivamente hasta que se rompe en el choque de los trenes.¿Qué distancia ha recorrido el juguete cuando llega por centésima vez al primer tren?

j) Demuestre que la suma de todos los números impares entre $k(k-1)$ y $k(k-1)+2k$ es el cubo de un número natural.

3. Calcule:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}2^i$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}2^k$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}2^n$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}2^{i+j}$