

2. Use el símbolo $\sum$ para abreviar las sumas que aparecen y resuelva los problemas.

(a) Calcule el valor de la suma de los primeros n cuadrados.

Solución:

Usaremos un pequeño truco para resolver este ejercicio.

Ya sabemos por el ejercicio 1.a que:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ahora, calculemos la siguiente suma.

$$\sum_{i=1}^n [(i+1)^3 - i^3] \text{ por suma telescópica.}$$

$$\sum_{i=1}^n [(i+1)^3 - i^3] = (n+1)^3 - 1$$

$$\sum_{i=1}^n [i^3 + 3i^2 + 3i + 1 - i^3] = (n+1)^3 - 1$$

$$\sum_{i=1}^n [3i^2 + 3i + 1] = (n+1)^3 - 1$$

$$3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 = (n+1)^3 - 1$$

$$3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n = (n+1)^3 - 1$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(n+1)^3 - 1}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2(n+1)^3 - 2 - 3n(n+1) - 2n}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(n+1)(2(n+1)^2 - 3n - 2)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(b) Calcule la suma de los primeros n números pares.

Solución:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n 2i &= 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n \\ \sum_{i=1}^n 2i &= 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) \\ \sum_{i=1}^n 2i &= 2\left(\sum_{i=1}^n i\right) \\ \sum_{i=1}^n 2i &= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ \sum_{i=1}^n 2i &= n(n+1)\end{aligned}$$

(c) Calcule

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110}$$

Solución:

La suma anterior puede representarse de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right]\end{aligned}$$

Como la anterior es una suma telescópica, se salvan solo el primer y último término.

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^{10} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{10+1} \\ &= 1 - \frac{1}{11} \\ &= \frac{10}{11}\end{aligned}$$

(d) Calcule

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^n$$

Solución:

Definamos la suma anterior como S ,

$$S = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n \quad (1)$$

Luego, multipliquemos la fila (1) por r ,

$$S \cdot r = r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + r^{n+1} \quad (2)$$

Al restar a la fila (1) la (2),

$$(1)-(2)$$

$$S - S \cdot r = 1 - r^{n+1}$$

$$S(1-r) = 1 - r^{n+1}$$

$$S = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

(e) Calcule la suma de los primeros n cubos.

Solución:

Usaremos un pequeño truco para resolver este ejercicio.

Ya sabemos por el ejercicio 1.a y 2.a:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Calculemos la siguiente suma, (este es el truco, normalmente a uno no se le ocurriría este planteamiento)

$$\sum_{i=1}^n [(i+1)^4 - i^4] \text{ por suma telescópica.}$$

$$\sum_{i=1}^n [(i+1)^4 - i^4] = (n+1)^4 - 1$$

$$\sum_{i=1}^n [i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1 - i^4] = (n+1)^4 - 1$$

$$\sum_{i=1}^n [4i^3 + 6i^2 + 4i + 1] = (n+1)^4 - 1$$

$$\begin{aligned}
 4 \sum_{i=1}^n i^3 + 6 \sum_{i=1}^n i^2 + 4 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 &= (n+1)^4 - 1 \\
 4 \sum_{i=1}^n i^3 + 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \frac{n(n+1)}{2} + n &= (n+1)^4 - 1 \\
 \sum_{i=1}^n i^3 &= \frac{(n+1)^4 - 1}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{4} \\
 \sum_{i=1}^n i^3 &= \frac{(n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n}{4} \\
 \sum_{i=1}^n i^3 &= \frac{(n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)}{4} \\
 \sum_{i=1}^n i^3 &= \frac{(n+1)[n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n(2n+1) - 2n - 1]}{4} \\
 \sum_{i=1}^n i^3 &= \frac{(n+1)[n^3 + n^2]}{4} \\
 \sum_{i=1}^n i^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
 \end{aligned}$$

(f) Calcule

$$1 + 1 + x + 1 + x + x^2 + 1 + x + x^2 + x^3 + 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

Solución:

Usaremos la formula deducida en el problema 2.d)

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Reescribiendo el enunciado,

$$\begin{aligned}
 &= 1 + (1+x) + (1+x+x^2) + (1+x+x^2+x^3) + (1+x+x^2+x^3+x^4) + (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) \\
 &= \frac{1-x}{1-x} + \frac{1-x^2}{1-x} + \frac{1-x^3}{1-x} + \frac{1-x^4}{1-x} + \frac{1-x^5}{1-x} + \frac{1-x^6}{1-x} \\
 &= \frac{6 - [x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6]}{1-x} \\
 &= \frac{6 - x \cdot [1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5]}{1-x} \\
 &= \frac{6 - x \cdot \left[\frac{1-x^6}{1-x} \right]}{1-x} \\
 &= \frac{6}{1-x} - x \cdot \frac{1-x^6}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

(g) Un jardinero, Don Ramón, tiene que regar 10 árboles que están dispuestos en una hilera separados entre sí por $6m$, Don Ramón regará los árboles con un balde que llenará de una llave que está a $10m$ del primer árbol. Determine cuánto camina Don Ramón después de regar el último árbol

Solución:

Para regar los árboles debe ir y volver,

$$= 10 + 10 + (10 + 10 + 6 + 6) + (10 + 10 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6) + \dots + (10 + 10 + 9 \cdot 6 + 9 \cdot 6)$$

- 10 metros ida desde la llave.
- 10 metros vuelta desde la llave.
- 6 metros ida entre un árbol y otro
- 6 metros vuelta entre un árbol y otro

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^9 [20 + 12 \cdot k] \\ &= 20 \sum_{k=0}^9 1 + 12 \cdot \sum_{k=0}^9 k \\ &= 20 \cdot 10 + 12 \cdot \frac{9(9+1)}{2} \\ &= 200 + 6 \cdot 90 \\ &= 740 \end{aligned}$$

(h) El abuelo de Carlos le ofrece: *mire Carlitos hoy le daré 500 bolitas, mañana 1000 bolitas, pasado mañana 1500 bolitas, al otro día 2000 bolitas y así sucesivamente 500 bolitas más que el día anterior por dos años, o bien si tu prefieres hoy te doy una bolita, mañana 2 bolitas, pasado 4 bolitas, al otro día 8 bolitas u así sucesivamente el doble de bolitas que el día anterior por un mes. Bien Carlitos, ¿qué prefieres?. Si tu fueses Carlos, ¿cuál de las opciones tomarías?*

Solución:

Primera opción:

$$\begin{aligned} &= 500 + 1000 + 1500 + \dots + 730 \cdot 500 \\ &= 500 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 730) \\ &= 500 \cdot \frac{730(730+1)}{2} \\ &= 133.407.500 \end{aligned}$$

Segunda opción:

$$\begin{aligned} &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \dots + 2^{30} \\ &= \sum_{k=0}^{30} 2^k \\ &= \frac{1 - 2^{31}}{1 - 2} \\ &= 2^{31} - 1 \end{aligned}$$

Prefiero la segunda opción.

(i) Dos trenes viajan por la misma línea férrea a 40km/h uno en dirección opuesta al otro, cuando los separan 100km , de uno de los trenes sale un juguete volador electrónico a una velocidad de 80km/h , cuando llega al tren opuesto se devuelve, cuando llega al primero se devuelve al segundo y así sucesivamente hasta que rompe en el choque de los trenes. ¿Qué distancia ha recorrido el juguete cuando llega por centésima vez al primer tren?

Solución:

Se hizo en la sección D-2, consíganse el cuaderno, pues es un poco largo de explicar.